Revista MICA.
Volumen _ No. _
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero – Junio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 81 - 88
Recibido: mayo 30 de 2023
Aprobado: junio 30 de 2023

Sólidos de Revolución: una forma de entender la integral
Solids of Revolution: a way of understanding the integral

Autores

Miguel Angel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
miguel.lopez@uan.edu.mx

Sólidos de Revolución: una forma de entender la integral
Solids of Revolution: a way of understanding the integral

Resumen

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución, se sigue generalmente el método del disco o el método del anillo. Ambos métodos se basan en la idea de aproximar el sólido de revolución mediante una serie de discos o anillos infinitesimales, cuyos volúmenes pueden ser calculados fácilmente. En esta investigación se sigue la aproximación por medio de discos, es decir se divide la región a rotar en delgadas franjas perpendiculares al eje de revolución. Cada franja se considera como un disco de radio determinado por la distancia entre la franja y el eje de revolución. El volumen de cada disco se calcula multiplicando el área del disco (πr^2) por el espesor de la franja o altura del disco (dx), y luego se integra para obtener el volumen total. En sí, se busca generar objetos tridimensionales obtenido al girar una región plana alrededor de un eje cartesiano.

Palabras clave: Cálculo Integral, Discos Sólidos, Eje de Revolución, Función, Calculo infinitesimal.

Abstract

To find the volume of a solid of revolution, the disk method or the ring method is generally followed. Both methods are based on the idea of approximating the solid of revolution by means of a series of infinitesimal disks or rings, whose volumes can be easily calculated. In this investigation, the approximation is followed by means of disks, that is, the region to be rotated is divided into thin strips perpendicular to the axis of revolution. Each fringe is considered as a disk of radius determined by the distance between the fringe and the axis of revolution. The volume of each disk is calculated by multiplying the area of the disk (πr^2) by the thickness of the fringe or height of the disk (dx), and then integrating to obtain the total volume. In itself, it seeks to generate three-dimensional objects obtained by rotating a flat region around a Cartesian axis.

Keywords: Roots, Integral Calculus, Solid Disks, Axis of Revolution, Function, Infinitesimal Calculus.

Introducción

El cálculo integral es una herramienta matemática que nos permite abordar problemas complejos relacionados con áreas, volúmenes y muchas otras aplicaciones. Entre las diversas técnicas utilizadas en el cálculo integral, los sólidos de revolución ocupan un lugar destacado. Estos sólidos se forman al girar una región plana alrededor de un eje y nos ofrecen un enfoque visualmente atractivo y conceptualmente interesante para comprender y calcular volúmenes en el contexto de la matemática, y de acuerdo a Sir Isaac Newton en dónde menciona: "La idea de los sólidos de revolución y su análisis mediante el cálculo integral es un ejemplo sublime de la belleza matemática que subyace en la naturaleza." Newton (1687), deja en claro que al general una función de dos dimensiones, se puede apreciar la creación de un sólido en tres dimensiones.

Otros matemáticos que se especializaron en temas relacionados con la geometría, especialmente cuando se trabaja en forma bidimensional, y se busca trasladar esas geometrías a una tercera dimensión, mencionan que un plano 2D, a través de un simple giro genera un plano 3D, como lo menciona René Descartes: "Los sólidos de revolución nos permiten ir más allá de la geometría plana y comprender cómo las figuras bidimensionales se transforman en objetos tridimensionales mediante un simple giro." Descartes (1637). Por otro lado, uno de los más grandes matemáticos de la historia Carl Friedrich Gauss, él se refiere a los sólidos de revolución como parte del mundo de la física y menciona que se relacionan entre ciertas disciplinas: "El estudio de los sólidos de revolución es esencial para comprender los fenómenos físicos que ocurren en torno a objetos que presentan simetría rotacional." Gauss (1827). En la actualidad se necesita dar soluciones a situaciones y problemas como de cálculo o diseño, debido a las exigencias que se da por la misma competencia profesional, es por eso que actualmente con la tecnología existen software de análisis y diseño, y parte de las operaciones booleanas matemáticas, son los sólidos de revolución, es por esto que el arquitecto y teórico de la arquitectura, urbanista, pintor, escultor y hombre de letras, Charles-Édouard Jeanneret- Gris, más conocido en la década de 1920 como Le Corbusier, menciona que: "La capacidad de calcular volúmenes mediante la técnica de los sólidos de revolución ha sido fundamental en el desarrollo de la arquitectura y el diseño de objetos tridimensionales." Le Corbusier (1954).

Justificación

La utilización de sólidos de revolución permite una representación precisa de objetos y estructuras complejas en un formato tridimensional. Esto es especialmente útil en campos como la arquitectura y la ingeniería, donde es necesario modelar y visualizar elementos como columnas, tuberías, engranajes y componentes mecánicos.

Según la investigación de Chauhan, A. (2018), la representación mediante sólidos de revolución ofrece una forma efectiva de visualizar y analizar las características geométricas y de movimiento de estos objetos, lo que facilita la toma de decisiones y la comunicación eficiente en el proceso de diseño y construcción. En cuanto a la aportación de los sólidos de revolución a la simplicidad de cálculos matemáticos y físicos, estos también simplifican los cálculos en el análisis de fenómenos complejos. Al transformar una figura bidimensional en un sólido de revolución, se pueden aplicar fórmulas y ecuaciones específicas para determinar propiedades como el volumen, el área de superficie, el centro de masa y momentos de inercia. En el estudio de Rada, G. (2019), se destaca que esta simplificación matemática es esencial en el análisis de estructuras rotacionales y vibraciones mecánicas, lo que permite ahorrar tiempo y recursos en el proceso de diseño y análisis. Para las aplicaciones en el ámbito físico y científico: Los sólidos de revolución encuentran aplicaciones significativas en el ámbito físico y científico. Por ejemplo, en la física de fluidos, se pueden utilizar para modelar objetos como cilindros y esferas en movimiento dentro de un fluido, lo que ayuda a comprender los fenómenos de arrastre y resistencia. Según el artículo de investigadores Choudhury, N. R. y Datta, P. K. (2019), los sólidos de revolución también se aplican en campos como la óptica, la acústica y la química, donde su uso permite simplificar los cálculos y facilitar el análisis de los fenómenos físicos involucrados.

Entonces los sólidos de revolución nos permiten el cálculo de volúmenes, áreas de superficies y momentos de inercia, y se utilizan en diversas áreas de la física y la ingeniería para analizar y comprender objetos tridimensionales de forma eficiente.

Soporte Teórico

¿Qué es un sólido de revolución?, Por supuesto que primero, es necesario comprender qué es un sólido de revolución, un sólido de revolución se entiende que es una figura tridimensional, creada a partir de una función que se encuentra en el plano cartesiano de ejes coordenados “x” y “y”, cómo se muestra en la figura 1 (Recuperado de https://periodico365.com/el-plano-cartesiano/).

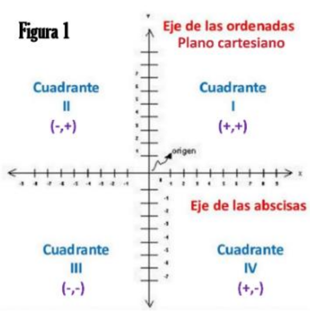


Figura 1: plano cartesiano de ejes coordenados en 2D

Ahora según Stewart (2015), un sólido de revolución se forma al girar una región R alrededor de un eje fijo para generar una figura tridimensional. Este eje puede ser cualquier línea recta, pero con frecuencia se utiliza el eje x o el eje y. Algunos ejemplos comunes de sólidos de revolución incluyen cilindros, conos y esferas.

Uno de los principales conceptos asociados a los sólidos de revolución es el de la integral definida. Según Larson y Edwards (2013), la integral definida se utiliza para calcular el volumen de un sólido de revolución. Para ello, se debe determinar una función que describa la región R, establecer los límites de integración y aplicar la fórmula correspondiente, cómo se muestra en la figura 2 (Recuperado de https://www.redalyc.org/journal/6079/607968030005/html/).

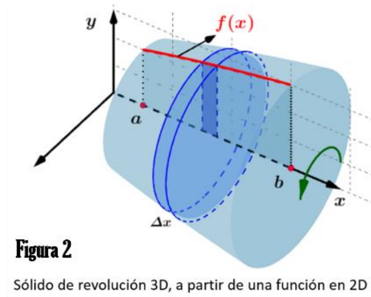


Figura 2: volumen de un sólido de revolución en 3D

Para calcular el volumen del disco del sólido de revolución, se necesita el área de un círculo cuyo radio será la función que representa la trayectoria, y se multiplica por la altura que representa la diferencial a integrar; Por lo tanto, el resultado de la integral definida proporciona el volumen exacto del sólido de revolución, cómo se muestra en la figura 3 (Fuente, autor de esta investigación).

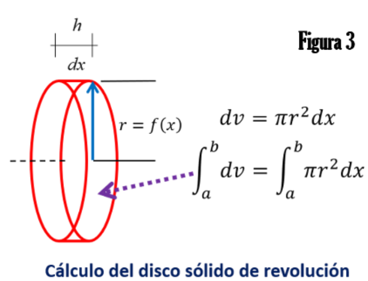


Figura 3: volumen de un disco sólido para revolución en 3D

Además, como otra aplicación, los sólidos de revolución también se pueden utilizar para calcular el área de una superficie curva, aunque este cálculo tiene su fórmula de apoyo especifica que en esta investigación no se incluye. Según Anton, Bivens y Davis (2014), se emplean integrales definidas para determinar el área de una superficie generada al girar una curva alrededor de un eje. Este proceso se conoce como la fórmula del área de superficie de un sólido de revolución y es una aplicación importante de la integral definida en el contexto de los sólidos de revolución.

Metodología

Los sólidos se obtienen al girar una región acotada alrededor de un eje, generando una figura tridimensional. Por lo tanto, la metodología para calcular volúmenes de sólidos de revolución utilizando la técnica del cálculo integral, para este ejercido en particular sería:

- Definir la región: Identificar la región en el plano “x”, “y” que se va a rotar alrededor de un eje para formar el sólido de revolución. Es importante delimitar correctamente la región y establecer los límites de integración adecuados, esto se logra igualando las ecuaciones delimitantes y posteriormente calculando sus raíces de intersección.

- Elegir el eje de revolución: Seleccionar el eje de revolución alrededor del cual se girará la región para formar el sólido (puede ser por el eje “x” o “y”). Esto determinará la variable independiente en la expresión integral.

- Expresar la función en términos de la variable independiente: Representar la forma de la región a través de una función en términos de la variable independiente, esto depende del eje en revolución, y es necesario que “x” o “y” estén despejadas, según el caso. Esto permitirá establecer los límites de integración y la función integrando.

- Determinar los límites de integración: Establecer los límites de integración para la variable independiente en función de la región a rotar. Estos límites se basan en los puntos de intersección de la región con el eje de revolución.

- Calcular la integral: Utilizar la fórmula del cálculo integral para determinar el volumen del sólido de revolución. La integral debe ser evaluada en los límites de integración obtenidos en el paso anterior.

- Simplificar y evaluar: Simplificar la expresión integral obtenida, aplicando técnicas de simplificación algebraica si es necesario. Finalmente, evaluar numéricamente la integral para obtener el volumen del sólido de revolución, este resultado quedará en unidades de volumen ya sea en el Sistema Métrico Decimal o el Sistema Inglés.

Objetivo

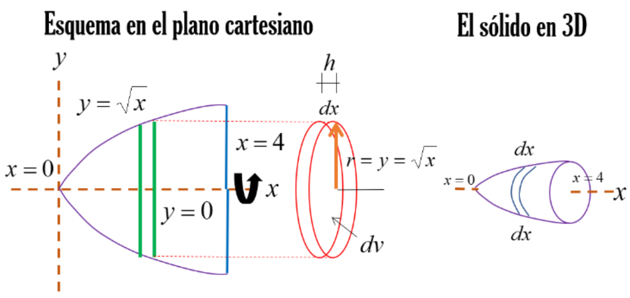
El ejercicio de un cálculo de sólido de revolución, mediante el uso de un disco sólido.

Hipótesis

El ejercicio de un sólido de revolución mediante discos y su técnica de integración adecuada, es un procedimiento entendible y accesible.

Solución a un ejercicio

En el siguiente ejercicio nos piden hallar el volumen del sólido que resulta de girar, alrededor del eje “x”, la región limitada por la curva y=√(x) y las rectas x=0, y=0 y x=4. Mediante discos resolverlo.



Entonces siguiendo los pasos para el cálculo del sólido de revolución, se tiene los límites (a=0 y b=4), el disco y la región correspondiente de acuerdo al eje que se pide.

Calculando el volumen:

$$dv = \pi r^2 h$$

$$dv = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$dv = \pi x dx$$

$$\int dv = \int_0^4 \pi x dx$$

$$v = \pi\int_0^4 x dx = \pi \left|\frac{x^{1+1}}{1+1}\right|_0^4 = \pi\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \pi\left|\frac{(4)^2}{2}\right| - \pi\left|\frac{(0)^2}{2}\right| = \pi\left|\frac{16}{2}\right| = \boxed{8\pi \text{ u}^3}$$

El volumen resultante de este ejercicio es de 25.1327 unidades cubicas.

Conclusiones

En conclusión, es posible calcular el volumen de un sólido generado por la rotación de una curva alrededor de un eje. Esta aplicación de la integral nos permite obtener resultados precisos y exactos, lo que resulta especialmente útil en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Entonces los sólidos de revolución en el cálculo integral son esenciales para comprensión y análisis de objetos tridimensionales de forma precisa. Además, las técnicas de integración nos brindan herramientas poderosas para calcular volúmenes, áreas de superficie y propiedades relacionadas, lo que resulta de gran utilidad en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Entonces el concepto de función representada en una segunda dimensión y que, al girar sobre un eje cartesiano, se puede entender cómo se genera un sólido tridimensional, con el uso de técnicas del cálculo infinitesimal desarrolladas en la época moderna por Sir Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

Bibliografía

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2014). Calculus. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. Limusa

Chauhan, A. (2018). Role of solid of revolution in engineering graphics: A review. International Journal of Current Engineering and Scientific Research, 5(1), 139-143.

Choudhury, N. R., & Datta, P. K. (2019). Solid of Revolution in Science. American Journal of Physics and Applications, 7(3), 66-71.

Gauss, C. F. (1827). Disquisitiones Arithmeticae [Investigations in Arithmetic]. Göttingen: Sumptibus Weberianis.

Descartes, R. (1637). Discours de la méthode [Discourse on the Method]. Paris: Ian Maire

Larson, R., & Edwards, B. (2013). Cálculo y geometría analítica (Novena ed.). McGraw-Hill.

Le Corbusier (1954). Le Modulor: Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique.

Newton, I. (1687). Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica [Mathematical Principles of Natural Philosophy]. Londini [London]: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater.

Rada, G. (2019). Solid of revolution – geometrical models and applications. Materials Science Forum, 942, 551-558.

Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Boston, MA: Cengage Learning.