Matemáticas, Ingeniería y Ciencias Ambientales

MICA

Vol. 6 No. 11
ISSN:2594-1993
Enero - Junio 2023

Editorial

"*MICA*" es una revista centrada en la difusión de trabajos de investigación en todas las áreas de la ingeniería, las ciencias básicas y en la enseñanza de estas áreas. La revista publica artículos de investigación científica y tecnológica, artículos de difusión y artículos de revisión, escritos en idioma inglés o español. La presentación de artículos para su publicación en la revista no tiene ningún costo.

En este nuevo número resaltamos por medio de los diferentes trabajos, el poder de las matemáticas en la educación: en consecuencia, lo invitamos ser parte de un corto viaje por diversas herramientas y conceptos

En el extenso mundo del aprendizaje de las matemáticas, existen diversos temas y conceptos que despiertan la curiosidad de muchos y brindan nuevas perspectivas sobre el fascinante universo de los números y las formas geométricas. En esta edición de nuestra revista de matemática educativa, examinaremos algunos de estos temas destacados, destacando su importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Comenzaremos nuestro recorrido abordando el estudio de los sólidos de revolución en relación con el aprendizaje de la integral definida. Los sólidos de revolución son una poderosa herramienta que nos permite visualizar y comprender la forma en que las integrales se aplican a objetos tridimensionales. Mediante su estudio, los estudiantes pueden apreciar la conexión entre las áreas de superficie y los volúmenes de estos sólidos, fortaleciendo su comprensión de los conceptos fundamentales de la integral definida.

En esta travesía matemática, no podemos dejar de mencionar la famosa fórmula de Cardano, utilizada en la resolución de ecuaciones de tercer grado. Esta fórmula, desarrollada por el matemático renacentista Girolamo Cardano, ha sido una herramienta invaluable para encontrar las soluciones de estas ecuaciones. Miguel Ángel López explora su origen y aplicación, destacando su relevancia histórica y su utilidad en la resolución de problemas prácticos.

En el grupo de Modelación Matemática, aborda la analogía en el proceso de modelación matemática, es decir, la capacidad de modelar situaciones del mundo real utilizando conceptos y herramientas matemáticas lo que es esencial para el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas. Se analiza cómo el proceso de modelación permite abordar situaciones complejas, estableciendo analogías entre conceptos matemáticos y fenómenos del mundo real. Esta conexión entre las matemáticas y la realidad que fomenta el razonamiento abstracto y la creatividad en los estudiantes es un trabajo de Gildardo Cortés Bello y colaboradores.

El análisis gráfico, por su parte, juega un papel fundamental en el estudio de las funciones matemáticas no lineales y en la modelación. A través de gráficos y representaciones visuales, los estudiantes pueden comprender mejor el comportamiento de estas funciones y realizar predicciones sobre su evolución. José Trinidad Ulloa Ibarra y el equipo de modelación matemática en Nayarit exploran diversas técnicas gráficas que permiten visualizar y analizar las funciones no lineales, fortaleciendo así la comprensión de los conceptos fundamentales y su aplicabilidad en distintas áreas del conocimiento.

Amín Bahena Salgado y colaboradores utilizan otra herramienta poderosa en el aprendizaje matemático: la geometría dinámica. Esta disciplina, que utiliza software interactivo para explorar y construir figuras geométricas, fomenta la intuición espacial y la comprensión de las propiedades geométricas. Destacan cómo la geometría dinámica puede ser un recurso invaluable para el estudio de las funciones matemáticas, permitiendo a los estudiantes experimentar con gráficos en movimiento y comprender la relación entre variables y formas geométricas.

Por último, Elsa García de Dios y equipo, abordan la importancia del trabajo autónomo de los estudiantes de licenciatura en ingeniería pesquera. El desarrollo de habilidades autónomas es crucial para el éxito en cualquier campo de estudio, y la ingeniería pesquera no es la excepción. Exploran cómo el trabajo autónomo, tanto en el ámbito teórico como en el práctico, permite a los estudiantes adquirir un dominio profundo de los conceptos y las habilidades necesarias para abordar los desafíos de esta disciplina.

En síntesis, esta edición de nuestra revista MICA educativa nos invita a sumergirnos en un viaje por el fascinante mundo de las matemáticas, explorando diversas herramientas y conceptos que enriquecen el aprendizaje. Desde los sólidos de revolución y la fórmula de Cardano hasta la modelación matemática, el análisis gráfico y la geometría dinámica, cada uno de estos temas ofrece valiosas oportunidades para ampliar nuestra comprensión y aplicar el poder de las matemáticas en nuestras vidas.

Alentamos a nuestros lectores a sumergirse en estos temas y descubrir cómo pueden transformar su propia experiencia en el aprendizaje de las matemáticas.

COMITÉ EDITORIAL

MICA Vol. 6, No. 11
Enero – Junio de 2023

Índice

Revista MICA.
Volumen 6 No. 11.
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero - Julio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 1 - 40
Recibido: enero 15 de 2023
Aprobado: febrero 20 de 2023

Las funciones de la analogía en el proceso de modelación matemática

The functions of analogy in the process of mathematical modeling

Dr. Gildardo Cortés Bello
Instituto Tecnológico de Acapulco
gildardo.cb@acapulco.tecnm.mx

M.C. Rodolfo Daniel Arrieta Bonilla
Facultad de Matemáticas UAGro
arrieta.d@hotmail.com

M.C. Marisol Ramírez García
Instituto Tecnológico de Acapulco
marisol.rg@acapulco.tecnm.mx

Las funciones de la analogía en el proceso de modelación matemática

The functions of analogy in the process of mathematical modeling

Resumen

En este artículo presentamos un aspecto de la analogía poco conocido, hablamos sobre sus funciones en el proceso de modelación; nos preguntamos, cuál es la función específica del uso de la analogía, cómo emerge durante su uso, y cómo es utilizada por los estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico Campus Acapulco (ITCA). Realizamos una investigación desde la perspectiva teórica de la Socioepistemología (Cantoral, 2013) sobre la analogía; reportamos evidencias de que la analogía en ciertos entornos es considerada como un método de razonamiento, que permite establecer la existencia de atributos idénticos entre las partes de entes diferentes; analizamos los entornos, encontrando evidencias de las funciones de la analogía a través de la metodología de investigación de diseños (Confrey, 2006).

Palabras clave: La analogía, procesos de modelación

Abstract

In this article we present a little-known aspect of analogy, we talk about its functions in the modeling process; we ask ourselves, what is the specific function of the use of analogy, how it emerges during its use, and how it is used by engineering students at the Instituto Tecnológico Campus Acapulco (ITCA). We carry out an investigation from the theoretical perspective of Socioepistemology (Cantoral, 2013) on analogy; We report evidence that analogy in certain environments is considered a method of reasoning, which allows establishing the existence of identical attributes between the parts of different entities; We analyze the environments, finding evidence of the functions of the analogy through the design research methodology (Confrey, 2006).

Keywords: The Analogy, modeling processes

Introducción

En nuestro trabajo, no podemos concebir separadamente a la analogía de la modelación matemática de fenómenos, por esa razón nosotros hemos adoptado la concepción de modelación como una práctica convivencia, que consiste en un proceso que articula a dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. En el proceso de modelación como práctica convivencia la diversidad de las entidades que intervienen en la articulación y naturaleza de la intervención hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta y Díaz, 2015, pp. 34-45).

En la actividad de modelar un fenómeno se ejercen ciertas acciones, una de ellas es la búsqueda de características comunes entre dos fenómenos a través de la comparación, es en esta parte del proceso cuando emerge la analogía como una herramienta o como un método, que permite caracterizar y articular propiedades semejantes de los entes a intervenir. En esa dirección nuestro objetivo está centrado en evidenciar las funciones de la analogía mediante la modelación de fenómenos o situaciones diversas.

Revisión bibliográfica

En Acevedo, J. M. (2004, pp. 188-205), se reporta la historicidad de los usos de la analogía durante el siglo XVIII, de cómo la teoría de la gravitación de Newton sirvió como fuente de analogía para el desarrollo de la electricidad llevado a cabo por científicos como Cavendish, Coulomb y Maxwell, entre otros. Así mismo, Oliva, J. M. (2008, pp.15-28), evidencía que son pocos los estudios que analizan de cómo los profesores usan la analogía en su práctica docente, aun cuando las prácticas docentes no siempre son concebidas y usadas de un modo acorde con las implicaciones de la investigación educativa.

En las investigaciones realizadas por Arrieta y Diaz (2015, p. 44) citando a Méndez (2008) menciona la forma en que los estudiantes construyen una red de modelos de lo lineal a partir de la modelación de la elasticidad de un resorte, al intentar modelar con la misma red otro fenómeno. Es posible que los actores conformen una red de modelos con un determinado fenómeno; sin embargo, la red no será estable hasta que salga del fenómeno, es decir, la red de modelos no será estable hasta que no se establezcan analogías con otros fenómenos.

De lo anterior dicho, consideramos que la modelación, es una práctica que al ejercerse involucra otras prácticas para la construcción de herramientas matemáticas; esto significa, que la modelación está conformada por una red de prácticas y herramientas matemáticas, en donde emerge como herramienta auxiliar la experiencia. Así, tenemos que la experiencia obtenida a partir de la modelación del fenómeno original es la base para establecer la analogía e intervenir otro fenómeno para modelarlo.

Planteamiento del problema y justificación

En nuestro trabajo, a la analogía la concebimos como un proceso en el que intervienen sus funciones, mediante las cuales podemos establecer diversas conexiones entre fenómenos de diversa naturaleza y sus referentes matemáticos. En este sentido la relación entre la analogía y la modelación estriba en los vínculos establecidos a partir de las similitudes encontradas entre las partes de los fenómenos distintos de ahí su importancia no solo en el aula, sino también en el ejercicio de la modelación a partir de la experimentación de fenómenos de diversa naturaleza para el desarrollo de la ciencia y la explicación de ciertas teorías científicas.

Los programas de estudio del modelo educativo, que actualmente tiene el Instituto Tecnológico Campus Acapulco (ITCA), quien depende del Tecnológico Nacional de México (TecNM), se exige la formación de ciertas competencias genéricas en el estudiante, una de ellas es la modelación, esto implica que los profesores deben conocer los procesos de modelación. De lo anterior visualizamos que la modelación matemática de fenómenos es un tema que en los actuales programas de estudio de matemáticas del ITCA no incluyen la forma de cómo introducir a los estudiantes en los procesos de modelación de fenómenos, se asume que el profesor sabe modelar. En los programas de estudio se establece como competencia previa, que el estudiante pueda obtener un modelo matemático de un enunciado, esto significa que el estudiante sabe aplicar los conceptos básicos de la matemática para modelar, ya que es prerrequisito para el aprendizaje de cada una de las asignaturas de matemáticas (cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales), en particular las asignaturas de primer semestre de los respectivos cursos de ingeniería. Esto trae como consecuencia la inquietud de considerar este caso como un problema de investigación sobre cómo los estudiantes pueden involucrarse en los procesos de modelación matemática.

Nuestro problema y tema de investigación se justifican por sí mismos, ya que en el ITCA los expertos en educación afirman; por ejemplo, que el programa de álgebra lineal aporta al perfil del ingeniero, la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas, por tal motivo se espera que el egresado pueda aplicar conocimiento matemático, para resolver problemas de la vida laboral y cotidiana, a través de la modelación. En esta dirección, la modelación matemática de fenómenos es una competencia que contribuye a la formación de las competencias laborales y profesionales en ITCA.

Hemos situado este problema en la línea de investigación, que estudia la relación entre las prácticas de modelación y la construcción de conocimiento matemático, particularmente aquellas prácticas de modelación y la construcción de modelos en el contexto del laboratorio virtual de ciencias en dónde emerge como principal herramienta las funciones de la analogía.

Metodología

Tratamos los antecedentes de la modelación bajo la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) y la concepción de la modelación de Arrieta y Díaz (2015); así como los aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica que hemos adoptado. En esta parte de la investigación hay elementos que solo pueden ser cubiertos con una metodología adecuada, como es lo que versa sobre lo que se hace en entornos físicos y lo que se hace en entornos matemáticos, y que es necesario introducir en los procesos de modelación matemática, particularmente en la construcción de los Diseños de Aprendizajes (DA), que hemos aplicado para recoger las evidencias. Nos referimos a una metodología de investigación de diseño (Confrey, 2006, pp. 135-152) que involucra al estudiante como un ser situado en un espacio y en un tiempo, esta metodología es la que más se ajusta a nuestros propósitos.

En nuestra línea de Investigación se involucra a las prácticas convivencia de modelación de fenómenos y se fundamenta en el Dasein Gei de Heidegger, que evoca al hombre echado al mundo situado, haciendo algo en un contexto referenciado a lo que hace, por qué lo hace, como las intenciones; cómo lo hace los procedimientos, con que lo hace, las herramientas y sus justificaciones los argumentos (Berciano, M. 1992, pp. 435-450).

Escenario experimental.

Los resultados de nuestro análisis fueron obtenidos a partir de la participación de 20 estudiantes del primer año de ingeniería del ITCA. Los estudiantes se organizaron en cinco equipos de cuatro estudiantes, las evidencias se recopilaron con videograbaciones y las producciones electrónicas (hojas de cálculo) y físicas (cálculos en papel). Han participado en diseños de aprendizaje que caracterizan a la modelación inversamente proporcional. Esto es, que los modelos inversamente proporcionales son aquellos en el que el producto de las variables es constante o “cuasi constante” si consideramos ruido en los datos.

Con esta finalidad elaboramos diseños de aprendizaje basados en el tránsito de un modelo que relaciona la fuerza entre dos cargas eléctricas a un modelo de la fuerza de atracción de dos masas. Para llegar a este diseño los estudiantes participan previamente en tres diseños. El primero referente a la modelación lineal del llenado de un estanque cilíndrico (Méndez, 2008), el segundo con base en la modelación inversamente proporcional del tiempo de vaciado de un vaso respecto del número de hoyos que tiene (Olea, 2011, pp.61-64) y el tercero la modelación de la fuerza entre dos cargas eléctricas (Cortés, 2013).

El diseño de aprendizaje: DA_ La ley de Coulomb

En nuestro trabajo, la situación que estamos abordando se basa en la modelación de fenómenos análogos, a partir de una red de modelos en donde la red del modelo de uno de ellos es conocida y sirve de base para modelar el otro fenómeno, a través de la analogía. Los aspectos epistemológicos de ciertos fenómenos nos permiten construir diseños de aprendizajes para lo inversamente proporcional (IP), cuya estructura siguen el esquema de la fig. 1 y 2.

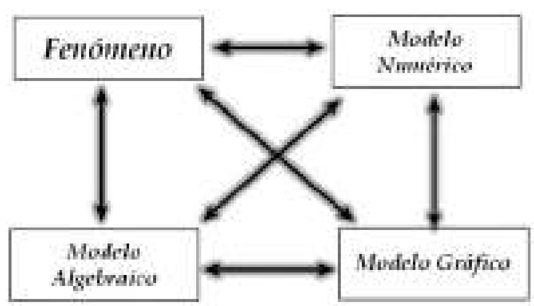


Fig. 1: Articulación de los referentes matemáticos con el fenómeno, a partir de una “Red de Modelos”, para lo IP.

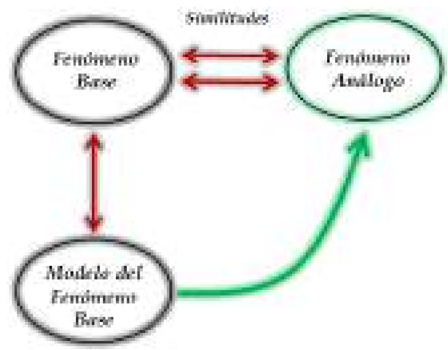


Fig. 2: Articulación de los referentes matemáticos del fenómeno base con el fenómeno análogo, a partir de la "Red de Modelos" del fenómeno base, para lo IP.

El análisis epistemológico de los diseños de aprendizajes para lo inversamente proporcional consiste en el análisis de la naturaleza de las prácticas con vivencia, la forma en que viven las prácticas de modelación en las comunidades en donde se originaron y la forma en que son modificadas y transferidas a otros contextos.

El resultado de este análisis permite diseñar nuevas prácticas; nuestra intención en este caso son las prácticas de modelación de lo inversamente proporcional, a partir del fenómeno que hemos denominado "el tamaño de la zancada"; el esquema de la fig. 3 da una orientación para su construcción.

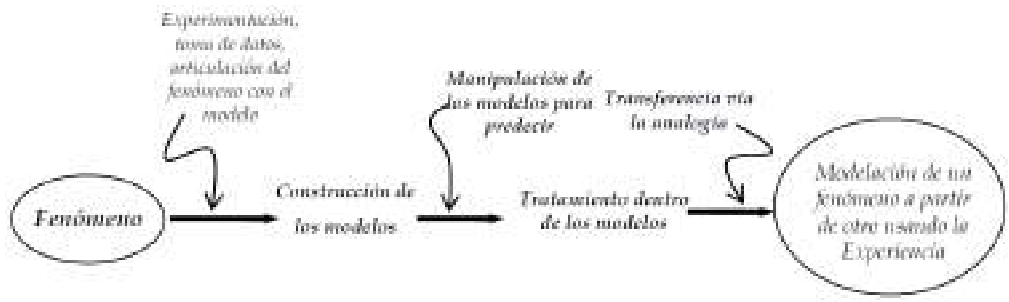


Fig. 3: Esquema para la práctica experimental: El tamaño de la Zancada

En este proceso se considera, que la experiencia es una práctica prolongada, que proporciona conocimiento o habilidad para hacer algo, esto a su vez es el motor generador de conocimiento, en ese sentido la experiencia nos remite a nuevas prácticas de modelación, a las que hemos denominado prácticas convivencia de modelación, en la construcción de conocimiento.

La modelación de la fuerza entre dos cargas eléctricas (Ley de Coulomb) la realizan a partir de la experimentación y toma de datos con un simulador digital. Primero, los estudiantes mantienen fija la magnitud de una carga y varían la magnitud de la otra carga. Después varían la distancia entre las cargas manteniendo fija las magnitudes de las cargas. Con los datos obtenidos en el primer caso, construyen modelo un lineal de la fuerza con respecto de la magnitud de las cargas. Con los datos obtenidos en el segundo caso construyen un modelo inversamente proporcional al cuadrado.

El esquema para la **Ley de Coulomb** queda determinado en la figura 4 (red de modelos fig. 1 y 2). Nuestra intención con este diseño es que los estudiantes logren construir lo inversamente proporcional y lo inversamente proporcional al cuadrado.

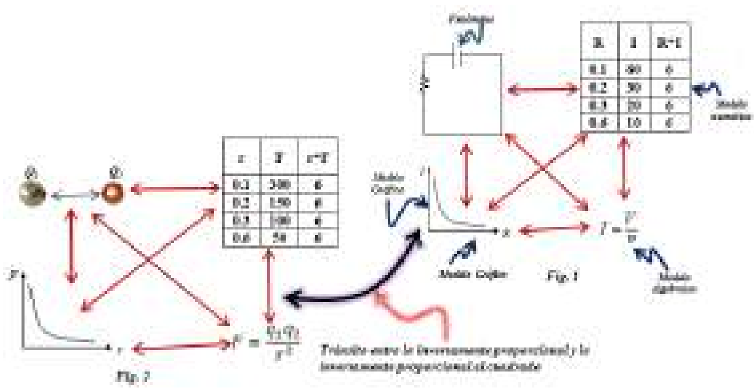


Fig. 4: Esquema para la ley de Coulomb (Red de modelos fig.1 y fig. 2)

La ley de gravitación universal de Newton.

Con la experiencia de modelar la fuerza entre dos cargas y haciendo uso de la analogía puedan modelar la ley de gravitación universal de Newton. La propuesta es que discutan en equipo, las preguntas: ¿Por qué caen los objetos?, ¿Caen o se atraen?, ¿Por qué gira la luna alrededor de la tierra?, ¿Si colocas dos cuerpos en una mesa se atraen o se rechazan?, ¿Qué pasa si están en el espacio?; para dar respuesta a dichas preguntas mostramos los aspectos teóricos, que nos permiten predecir la interacción de los estudiantes en la experimentación

La analogía.

En nuestro trabajo de investigación hemos concebido a la analogía como un proceso de articulación de los elementos y de las relaciones de una entidad uno $\left(E_1\right)$ con los elementos y de las relaciones de una entidad dos $\left(E_2\right)$. En el proceso de articulación de los elementos y relaciones entre las dos entidades E_1 y E_2 la analogía se caracteriza por su intencionalidad, que conlleva a conocer a los elementos y las relaciones de la entidad E_2 a partir de su articulación con los elementos y relaciones de una entidad E_1 ya conocidos.

La construcción de la analogía se inicia con una interacción o experimentación (fase uno) en un sentido amplio de la entidad a conocer (E_2), en esta interacción identifico a los elementos y a sus posibles relaciones; en una segunda fase planteamos relacionarlos o articular a los elementos identificados con los elementos de la entidad conocida (E_1); en una tercera fase establecemos la analogía y verificamos que funciona, desde nuestros propósitos (*intencionalidad: modelar para intervenir, intervenir para predecir, etc.*), donde los elementos son los diferentes modelos que componen una red.

En general podemos decir que en la construcción de la analogía siempre estarán presentes tres componentes básicos referidos a las *entidades*, los *atributos* y las *relaciones* establecidas entre ellos conformando una red. En ese sentido se puede argüir que la analogía vive sobre una base construida en diseños de aprendizajes con *prácticas convivencia*, estableciéndose lo que hemos llamado *funciones de la analogía*, estas funciones se relacionan con los elementos que se articulan de las referidas entidades E_1 y E_2.

La construcción de la analogía en nuestra investigación se consolidad en un todo o unidad, a partir de la constitución de sus funciones referente a los *argumentos*, los *procedimientos*, la *utilización* del referente construido y la función relacional que permite la intervención, a través de la experiencia vía la analogía.

Para nosotros en esta investigación, una práctica-con-vivencia *(P-C-V)* está referida a actividades recurrentes, que se ejercen en interacción. La referencia a convivencia tiene su fundamento en el constructo de la, *Dasein Gei de Heidegger*, que evoca al hombre echado al mundo situado, haciendo algo en un *contexto referenciado* a lo que hace, por qué lo hace, como las intenciones; cómo lo hace los procedimientos, con que lo hace, las herramientas y sus justificaciones los argumentos. (Berciano, M., 1990, pp. 135-152).

La práctica convivencia es un ente dinámico, que evoluciona en el tiempo que tiene su pasado, que explica porque ha llegado a ser como son y su horizonte que da cuenta de que es, lo que llegarán a ser: *las herramientas, los procedimientos, los argumentos y las intenciones.* Los aspectos mencionados son los que dan origen a las funciones de la analogía referente a:

- *La función argumentativa*
- *La función procedimental*
- *La función utilitaria o instrumental*
- *La función relacional.*

Las funciones de la analogía

La *función argumentativa* tiene su origen en las acciones durante la articulación de los argumentos e implica su validación de los argumentos para la entidad construida, destacando las similitudes que avalan las conclusiones extraídas de la entidad propuesta a partir de una regla, que sugiere una metodología propia de investigación. La función argumentativa se constituye en el dispositivo por el cual se formulan nuevos argumentos relativos a las caracterizaciones o relaciones que se dan entre las entidades propuestas y las entidades a construir, a partir de ciertas observaciones iniciales en una experimentación de la entidad propuesta. La construcción de la función argumentativa implica la elaboración de una tabla de caracterización de los fenómenos o entidades (E_1) y (E_2), además sugiere una metodología propia de investigación.

La *función procedimental*, tiene su origen en los procedimientos articuladores de las dos entidades en interacción E_1 y E_2, en esta parte de la construcción de la analogía, se articulan las herramientas (modelo algebraico, numérico, gráfico) que pueden ser adoptadas por tener igual función en ambas identidades por analogar, aun cuando se trate de fenómenos distintos pero cuyos referentes matemáticos cumplan con las mismas propiedades de los números reales. La función procedimental se construye identificando a los elementos y estableciendo aquellos que tienen igual función en ambas entidades en interacción en la forma siguiente: Durante la experimentación se identifican y se miden la diferencia de las magnitudes tanto en la entidad (E_1) como en la entidad (E_2).

La *función utilitaria o instrumental* se refiere a la utilización de las herramientas (modelos algebraicos, numérico, gráfico), que funcionan como las herramientas, para un obrero en una fábrica o los utensilios de cocina para un chef. Esta función asigna significados a los modelos, está centrada en la utilización de los modelos y su funcionamiento como instrumentos de predicción, potencializando y diversificando la acción y forma de intervención. En esta función se realizan todas las acciones pertinentes referentes a la articulación de los parámetros de los diferentes modelos con los fenómenos y sus respectivas prácticas.

La *función relacional* permite articular, las redes de modelos y sus relaciones conceptuales con lo modelado, en esta función se producen por completo todas las funciones de la construcción de la analogía, destacándose la importancia de la naturaleza de la modelación, que dota de una caracterización a las prácticas de modelación, a través de la articulación y su intencionalidad de intervención.

Durante experimentación se hace necesario interactuar con la entidad que se desea intervenir y su red de modelos asociados a ella. En este proceso resulta, que la experimentación no es suficiente debido a que, al intervenir una identidad a partir de otra durante el acto de modelar, se obtienen nuevos elementos sujetos de análisis que permiten una configuración de las prácticas de modelación

Finalmente, en la construcción de un modelo vía la analogía, la sola experimentación no es suficiente, pues en el proceso de modelación, al intervenir una identidad a partir de otra, se obtienen nuevos elementos de análisis, que permiten configurar las prácticas de modelación, lo que significa nuevos arreglos entre los elementos y sus relaciones conceptuales que forman una red de modelos asociados con la entidad por modelar.

La configuración de las redes de modelos permite distinguir a la intencionalidad, dotando de los medios o herramientas para la caracterización de estas en el acto de modelar. De esto último, las funciones de la analogía permiten establecer las etapas de las prácticas convivencia de modelación al poner en escena el diseño experimental de la ley de Coulomb, que en nuestra investigación están referidas a:

a) La experimentación con el fenómeno, que establece las bases de lo convivencial
b) La linealidad de la fuerza con respecto a las cargas
c) La relación inversamente proporcional al cuadrado de la fuerza con respecto de las distancias de las cargas
d) Establecer el campo de fuerzas referidas a la posición de las cargas.

Las etapas de las prácticas convivencia dan lugar al establecimiento de la red de modelos asociadas al fenómeno base, y que es transferible al fenómeno análogo a partir de la caracterización de la red. El resultado de este análisis permite diseñar nuevas prácticas; nuestra intención en este caso son las prácticas de modelación de lo inversamente proporcional al cuadrado, a partir del fenómeno que hemos denominado "Ley de Coulomb"; el esquema siguiente da una orientación para su construcción.

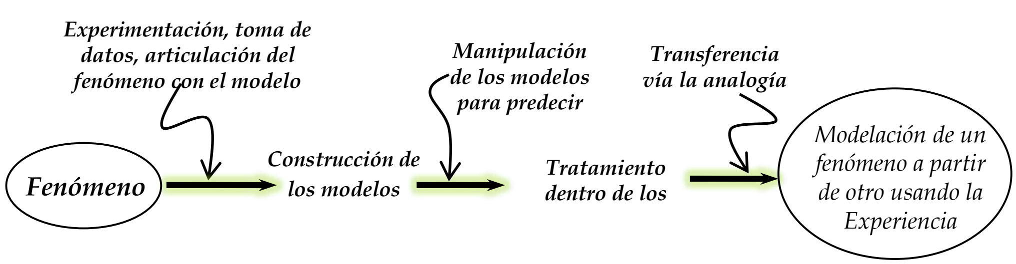


Fig. 5: Esquema de la analogía entre la ley de Coulomb y la de Gravitación Universal

Mediante la *función relacional* podemos construir el diseño de aprendizaje para la construcción de lo hiperbólico y lo hiperbólico al cuadrado como se muestra en la figura 4, en donde la analogía es la herramienta vinculadora de la red de modelos para la construcción de lo hiperbólico al cuadrado D3, a partir de fenómenos eléctricos D1 y D2.

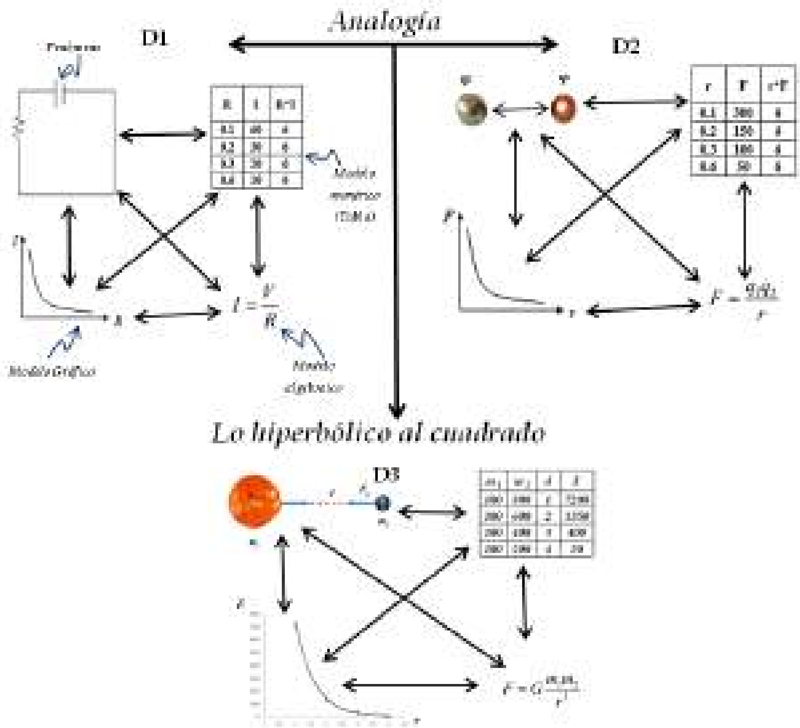


Fig. 6: Vinculación de una red de modelos D1 y D2, a través de la analogía para lo hiperbólico al cuadrado, para fenómenos gravitacionales D3

Las características básicas que nos interesa reconozcan los estudiantes en la ejecución de los diseños de aprendizajes (prácticas de modelación convivencia) es que:

1) *Distingan las variables que intervienen en el fenómeno base y el fenómeno análogo*
2) *Establezcan las relaciones que existen entre las variables*
3) *Distingan la relación entre los datos y las variables del fenómeno a modelar*
4) *Establezcan patrones de comportamiento con los datos obtenidos del fenómeno*
5) *Construyan un modelo y predecir con él.*

Resultados y Conclusiones

Mostramos como resultado el análisis de los datos durante la experimentación virtual, esto es, las evidencias de cómo trabajan los estudiantes del ITCA con el simulador coulomb en la fig. 7 y como trabajan las gráficas con Excel fig. 8

Análisis de los datos

La Experimentación virtual con dos cargas eléctricas

Fig. 7: Fotografías de como los estudiantes trabajan con el simulador

Fig. 8: Fotografías donde trabajan con graficas fuerzas y distancia

Los equipos trabajan con el simulador Coulomb para experimentar virtualmente, y tomar datos. La experimentación se realiza en equipos y toman datos en una hoja de cálculo (Excel). Se les proponen a los estudiantes, que exploren el simulador “Coulomb” y se fija un tiempo de 15 minutos para que ellos se familiaricen, figura 9.

Fig. 9: Estudiantes del equipo ET9 explorando el simulador Coulomb

Se experimenta y se toman datos en tres etapas, en una se fija la magnitud de la primera carga, la distancia a la que se encuentra la segunda carga, y variamos la magnitud de la segunda carga. Solo consideramos cargas del mismo signo, en este caso cargas positivas.

Los datos se capturan en Excel y después los escriben en la tabla que se les proporciona en el diseño de aprendizaje como lo muestra la fig. 10

Cargas eléctricas (μC)		Distancia entre las cargas (cm)	Fuerza entre las cargas (N)
q_1	q_2	d	F
10	5	5	91.8367
10	15	5	275.5102
10	25	5	459.1836
10	35	5	642.8571
10	45	5	826.5306
10	55	5	1010.2040

Fig. 10: Tabla de datos obtenidos con el simulador Coulomb por el ET1

En la segunda experimentación, se fijan la magnitud de las cargas y se varían la distancia entre ellas. Ambas cargas se mantienen positivas en la experimentación como lo muestra la tabla de Excel del equipo ET4 figura 11.

Cargas eléctricas (μC)		Distancia entre las cargas (cm)	Fuerza entre las cargas (N)
q_1	q_2	d	F
10	80	0.10	120
10	60	0.20	135
10	40	0.30	40
10	20	0.60	5

Fig. 11: Tabla de datos del equipo ET4, se fijas la magnitud de las cargas positivas en la experimentación y se varía la distancia entre ellas.

En la tercera experimentación, se fija la magnitud de las dos cargas y se hace variar la posición de la segunda carga de tal forma, que puedan obtener una figuración del campo de fuerzas fig. 12.

Fig. 12: Equipo ET2 del ITA manipulando el simulador, observan las cargas positivas y el campo magnético

Los estudiantes construyen, articulan la simulación entregada con el fenómeno a modelar, como lo muestra la actividad de los alumnos del ET2 en el Episodio 7.3.1.2.

El profesor y estudiantes del ET2

Episodio 7.3.1.2: La fuerza es proporcional a las cargas

Faustino ET2: ¿Ya entendiste cómo funciona el simulador?

Yasahandi ET2: Si, mira, si la carga es mayor la fuerza es mayor, y si la distancia es menor la fuerza es menor.

Liliana ET2: Pero ahí debes decir, que se repelen si son del mismo signo, si son de diferente signo se atraen.

Netzahualcóyotl ET2: La neta yo no le he entendido como le cambias las cargas

Faustino ET2: ¡Hay! ¿Dónde estabas? se le pone aquí la cantidad de carga y la regla.

Liliana ET2: No eso de la regla ya le entendí, ya sé cómo se le mueve. Lo que no le he entendido es porque mueves tanto una carga o sea cuando está aquí mueves acá, y las flechas que salen.

Faustino ET2, 1: Ha porque así nos lo pide el profe, no le estoy entendiendo nada

Liliana ET2: Es que la flecha que sale ahí…

Análisis

La simulación no solo consiste en el software que se propone exploren, sino en la articulación, que hacen los actores de las variables y procedimientos de la simulación con el fenómeno. En este episodio, se muestra cómo los estudiantes han articulado las variables y los procedimientos del simulador con las del fenómeno, a esto que han construido, es lo que llamamos la simulación.

La tecnología en este caso apoya las prácticas de experimentación. Mientras que Coulomb diseña sus aparatos experimentales, como la balanza de torsión; los estudiantes utilizan el simulador Coulomb. Reconocemos, que la distancia es enorme, pero una forma vivencial del fenómeno es a partir de su simulación. Este proceso de construcción de la simulación se da a partir de la analogía entre los elementos y procedimientos de la simulación, y los elementos y procedimientos del fenómeno.

La simulación no es el software, la simulación consiste en el proceso del estudiante, que articula el software con el fenómeno, que se intenta simular.

La linealidad de las cargas con respecto a la magnitud de las cargas

Los estudiantes modelan la fuerza de repulsión de dos cargas eléctricas con el mismo signo por un modelo lineal, cuando las variables son fuerza y magnitud de la carga 2.

Parten de los datos recopilados en la experimentación, donde mantienen fija la magnitud de la carga 1 y varían la carga dos, y la distancia se mantiene constante. El proceso de modelación de la fuerza entre la segunda carga por modelos lineales involucra diferentes formas de predicción, la construcción de diferentes modelos y el establecimiento de una red que los articula. Este procedimiento, es análogo al que se vive al modelar linealmente la elasticidad de un resorte (Arrieta, 2003, pp. 76-79). Proceso que han convivenciado anteriormente.

A continuación, se muestran evidencia en el Episodio 7.3.2.1 de cómo los estudiantes modelan la fuerza entre las cargas, si se varían la magnitud de la carga 2, la carga 1 y la distancia se mantienen fijas.

El profesor y estudiantes del equipo ET1

Episodio 7.3.2.1: La experimentación discursiva

Situación:	Si la carga 2 tiene una magnitud de 38.8 microcoulomb. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza?
Oscar ET1:	Si multiplicamos 38.8 mc por la fuerza que aumenta por un microcoulomb te va a dar la fuerza.
Profesor:	¿Cuánto es?
Oscar ET1:	Es 18 por 38.8 y da 698.8
Profesor:	Pero en general, ¿ya sabes cuantos para una carga q_2?
Oscar ET1:	Si es lo mismo como en el resorte, pero aquí el inicio es cero.
Profesor:	¿Cómo sería el modelo algebraico?
Oscar ET1:	$F = 18q_2$

Se mantiene fija carga 1 y la distancia, como o muestra las figuras 13 y 14

q_1	q_2	d	F
20	5	10	90
20	10	10	180
20	15	10	270
20	20	10	360
20	25	10	450
20	30	10	540

Fig. 13: Tabla de datos del equipo ET4, se fijas la magnitud de las cargas positivas en la experimentación y se varía la distancia entre ellas.

Fig. 14: ET1 discutiendo los resultados obtenidos con el simulador Coulomb cuando la carga dos es 27 Coulombs

Profesor: ¿Cuándo la carga 2 es 27 Coulombs cuál es la fuerza?

Oscar ET1: Multiplicamos 18 por 27 y da 486

Análisis

Los estudiantes del equipo ET1 y ET4 modelan la fuerza entre dos cargas eléctricas, a partir de la variación la carga 2, analogándo los elementos y procedimientos de la práctica de modelación de la elasticidad del resorte, usan el valor de la constante que es 18 y multiplican por el valor de la carga 2 que es 27 y obtienen 486, de esta forma los actores proceden para encontrar el valor de la fuerza para el valor de otra variación de la carga manteniendo las condiciones iniciales.

La modelación de la fuerza entre dos cargas con respecto a su distancia

Mostramos las evidencias de cómo los estudiantes modelan la fuerza entre dos cargas con respecto a la distancia entre ellas. El episodio 8.3.1.1 muestra cómo los estudiantes participantes argumentan y construyen sus herramientas para justificar sus resultados.

Campo vectorial entre dos cargas eléctricas

En esta sección se muestra, cómo los estudiantes del ITCA pueden visualizar el campo vectorial, a través de la interacción entre dos cargas eléctricas, así como su magnitud y la dirección de la fuerza figura 15 y 16.

Fig. 15: los equipos ET9 y ET8 interactuando con el simulador Coulomb y discutiendo los resultados obtenidos respecto al campo de fuerza generado por las cargas 1 y 2.

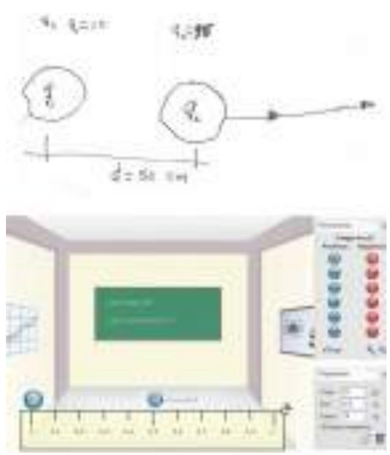


Fig. 16: Visualización de las líneas de fuerza que generan las cargas eléctricas q_1 y q_2 por el equipo ET9.

El episodio relativo a la construcción de la red de modelos lineales con el fenómeno muestra evidencia de las herramientas construidas por los estudiantes para modelar la fuerza y las distancias entre las cargas para lo hiperbólico al cuadrado.

La red de lo hiperbólico al cuadrado centrada en la fuerza entre dos cargas eléctricas

Los estudiantes construyen una red, que articula los modelos inversamente proporcionales al cuadrado con el fenómeno de la fuerza entre la distancia de dos cargas eléctricas.

La fuerza entre dos masas, la experimentación discursiva: la ley de gravitación

Esta parte de la puesta en escena de los diseños de aprendizaje comprende la Fase I, en donde los estudiantes del ITCA modelan la fuerza entre dos masas con base en la experimentación con el simulador Coulomb, variando la magnitud de la carga 2, la carga 1 y la distancia. Ahora los estudiantes variarán la magnitud de la masa 2 y la distancia entre ellas, la masa 1 permanece fija utilizando los valores propuestos por el profesor de los datos de la tabla de Excel figura 17.

Masa en (kg)		*Distancia (m)*	*Fuerza (N)*
m_1	m_2	d	F
10	10	1	
10	20	2	
10	30	3	
10	40	4	
10	50	5	

Fig. 17: Tabla propuesta por el profesor para los valores de las masas 1 y 2 en kilogramos, la distancia en metros

A continuación, se muestra como evidencia un extracto del episodio referente a la articulación de la transición entre el fenómeno eléctrico y el fenómeno gravitacional con la participación de los integrantes del equipo ET9 del ITCA

En el ITCA los estudiantes participantes obtuvieron resultados similares, sin lograr valores más precisos para la constante k, mostramos un fragmento del episodio 7.3.6.1 en donde los estudiantes articulan los datos de la tabla correspondientes a las masas m_1 y m_2 para transitar entre el fenómeno eléctrico y el gravitacional.

El profesor y estudiantes del ET9

Episodio 7.3.6.1: **Articulando la transición entre el fenómeno eléctrico y el fenómeno gravitacional**

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando la masa $m_1 = 10\ kg$ y la masa $m_2 = 10\ kg$ están separadas a una distancia de 1 metro?*

Miguel: 100 Newtons profe…

Profesor: *¿Por qué?*

Miguel: multiplicamos 10 por 10 obtuvimos 100 y dividimos por la distancia al cuadrado y me dio 100 …

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando la masa $m_1 = 10\ kg$ y la masa $m_2 = 20\ kg$ están separadas a una distancia de 2 metros?*

Miguel: 50 Newtons

Profesor: *Si la masa m_1 fuera 10 kg y la masa m_2 30 kg separadas a una distancia de 3 metros, ¿cuál sería la fuerza?*

Miguel: 33.3333 Newtons

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando las masa $m_1 = 10\,kg$ y la masa $m_2 = 40\ kg$ están separadas a una distancia de 4 metros?*

Miguel: 25 Newtons

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando las masa $m_1 = 10\,kg$ y la masa $m_2 = 50\ kg$ están separadas a una distancia de 5metros?*

Miguel: 20 Newtons

Profesor: *¿Cómo obtuvieron sus resultados?*

Miguel: usando la fórmula de Coulomb

Profesor: *¿Puedes escribir el modelo para el fenómeno gravitacional?*

Miguel: Si… $F = Mm/d^2$

Fig. 18: Estudiantes del equipo ET9 discuten y articulan a partir de los datos de la tabla (valores de las masas 1 y 2, la distancia) propuesta por el profesor el tránsito de la ley de Coulomb a la ley gravitacional.

Fig. 19: Cálculos realizados por estudiantes del equipo ET9 para la fuerza F con los valores propuestos para las masas m_1 y m_2, para transitar hacia el fenómeno gravitacional a partir de la ley de Coulomb.

Análisis

Los resultados obtenidos por el equipo de Miguel son la evidencia del tránsito de la ley de Coulomb hacia la ley gravitacional en la cual emergen las funciones procedimental y relacional de la analogía; los valores para la fuerza gravitacional F entre dos masas m_1 y m_2 fueron obtenidos utilizando la ley de Coulomb en la cual puede observarse un error de precisión al no utilizar una contante k como ocurre con la ley de Coulomb, la función relacional de la analogía emerge parcialmente, ya que no establecen la relación entre la constante *k* y la constante G de gravitación, la figura 20 muestra el aspecto de la discursivo de la vinculación entre los parámetros del fenómeno eléctrico y el fenómenos gravitacional.

Fig. 20: Estudiantes del Equipo ET9 del ITCA discutiendo los resultados del fenómeno eléctrico y gravitacional

A continuación, mostramos un extracto del episodio referido a la experimentación argumentativa, donde estudiantes del ITCA articulan redes de modelos hiperbólicos cuadráticos para transitar del fenómeno eléctrico al fenómeno gravitacional, a partir de la experimentación argumentativa como una forma alterna. Inicia el profesor con el planteamiento de una situación experimental. Pide a Ricardo integrante del equipo ET9 del ITCA, que tome una hoja de papel y la comprima para hacer una especie de esfera, esto es simulando un cuerpo aproximadamente esférico y lo alcen a altura de su rostro, y lo deje caer fig. 21.

Fig. 21: Ricardo ET9 participante del ITCA deja caer una esfera de papel y observa que sucede.

El profesor empieza el cuestionamiento sobre la experimentación discursiva alterna con los estudiantes de los equipos participantes del ITCA respectivamente, observando que los estudiantes utilizan como principal herramienta argumentativa el discurso; esta característica es común en un proceso de modelación y, es muy razonable actuar así, ya que en cualquier situación experimental siempre se procede a teorizar tratando de justificar con los conocimientos previos los resultados obtenidos sobre lo observado.

El esquema de la figura 22 muestra lo que se hace en un entorno físico y lo que se hace en un entorno matemático durante un proceso de modelación, y las acciones relativas al acto de modelar para vincular los parámetros de las redes de modelos a los fenómenos en cuestión, a través de la función relacional de la analogía.

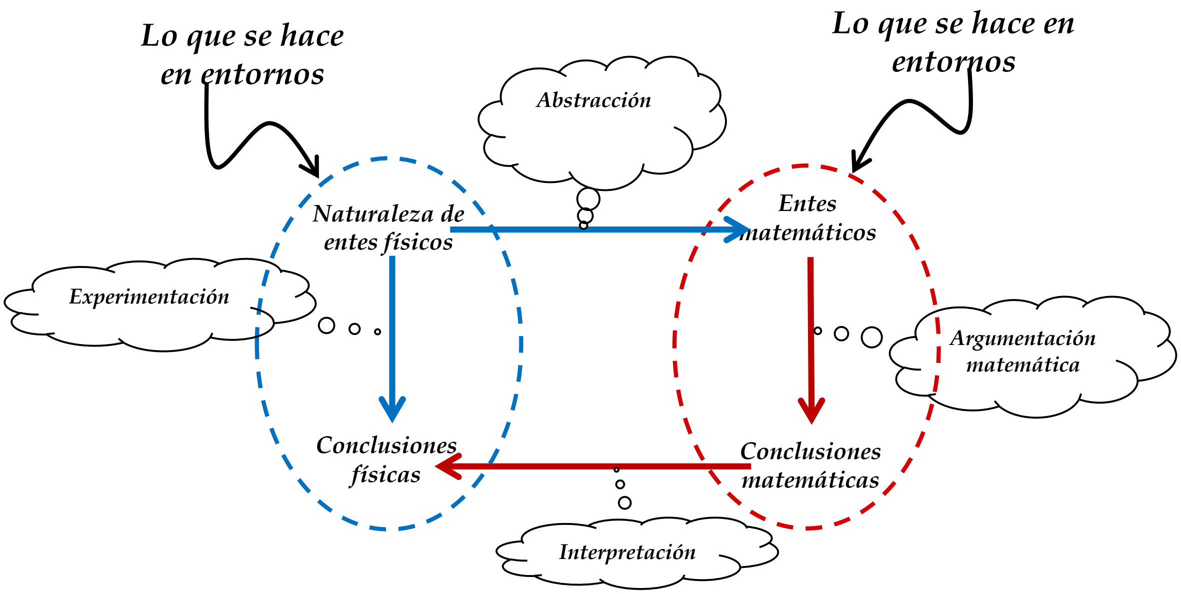


Fig. 22: Esquema sobre lo que se hace en la modelación en los entornos fisicos y matematicos

En el esquema la parte izquierda ilustra lo que se hace en el estudio de un fenómeno físico, es decir, el proceso que se lleva a cabo para la formulación de hipótesis, teoría o leyes físicas, aplicando principalmente el método científico en la experimentación. En la parte derecha se muestra lo que se hace en el estudio de teoremas, propiedades, de entes matemáticos, es decir, muestra el trabajo de abstracción para extraer relaciones matemáticas entre teoremas, etc., aplicando algún método, como la deducción, la inducción o la analogía que se manifiesta en las acciones humanas para descubrir un cierto tipo de relación o propiedad, a través de sus funciones. En conjunto, el esquema explica cómo se puede realizar una transferencia vía las funciones de la analogía en una experimentación discursiva durante el acto de modelar de un entorno físico a un entorno matemático.

El episodio referente a la experimentación argumentativa muestra como herramienta el discurso para la articulación vinculación de los modelos.

El profesor y estudiantes del ET9, ET10

Episodio 7.3.6.2: **Experimentación argumentativa: articulando redes de modelos hiperbólicos cuadráticos con el fenómeno eléctrico para transitar hacia el fenómeno gravitacional**

Situación: *Dejando caer un objeto ¿qué pasa aquí?*

Profesor: *¿Por qué caen los objetos?*

Miguel Ángel ET9: Son atraídos al suelo por la gravedad…

Profesor: *Y ¿qué es la gravedad?*

Francisco ET9: Es la fuerza que tiene la tierra para que la atraiga hacia ella…no permite que salga hacia el espacio… es la fuerza que la tierra tiene para permanecer estables o estáticos sobre ella y no tener un descontrol sobre nosotros.

Profesor: *¿Caen o se atraen?*

Miguel Ángel ET9: Son atraídos por la fuerza de gravedad…se atraen

Profesor: *¿Por qué gira la luna alrededor de la tierra?*

Marcos ET10: Porque la gravedad hace que no se salga de su órbita y se mantenga dando vueltas dentro de su órbita alrededor de la tierra.

Profesor: *¿Si colocas dos cuerpos en una mesa se atraen o se rechazan?*

Francisco ET9: depende mucho de los objetos…si colocamos dos imanes despagados quedan estáticos, también depende mucho de la mesa, si la mesa está un poco inclinada los objetos pueden juntarse o igual pueden caerse de la mesa

Marcos ET9: Se quedan fijos a menos que haya una fuerza externa que intervenga como lo podría hacer si ponemos 2 imanes por lado de sus polos opuestos se atraerían rompiendo la gravedad.

Análisis

Del análisis de la experimentación argumentativa de los estudiantes de los equipos ET9 y ET10 del ITCA observamos que articulan los diversos elementos de juicio que tienen a su disposición para justificar sus producciones argumentativas surgidas a partir de la experimentación virtual con la práctica experimental "ley de Coulomb". En la cuestión "*porque caen los objetos*" Miguel Ángel del ET9 argumenta que, es por causa de la gravedad que son atraídos, él afirma por intuición que no caen, esta intuición le viene de manera automática después de la experimentación con el simulador Coulomb, esto es coincidente con la respuesta que da en la cuestión "*caen o se atraen*", su respuesta es la

misma ", "*Son atraídos por la fuerza de gravedad…se atraen"*, relaciona lo observado con el comportamiento de las cargas eléctricas uno y dos, y las masas 1 y 2.

Cuando se le cuestiona "*y, qué es la gravedad*" da como respuesta "*…es una fuerza"*, Francisco ET9 estudiante del mismo equipo de Miguel ángel argumenta "*es la fuerza que tiene la tierra*". El resto de los estudiantes coinciden que la gravedad es la causa de que los objetos sean atraídos hacia la tierra, y que no caen más bien se atraen.

Esta percepción de los estudiantes es posible, solo por acción de la función relacional de la analogía, que les permite ver ciertas características comunes en ambos fenómenos. Por ejemplo, lo que hace que dos cargas distintas q_1 y q_2 se atraigan o se rechacen es una fuerza, lo mismo sucede en el caso de dos masas distintas m_1 y m_2 lo que provoca que se atraigan o se rechacen, o bien en el caso de los objetos cercanos a la superficie de la tierra en lugar de caer sean atraídos por la tierra es una fuerza, y que esta fuerza depende del tamaño de las masas o de las cargas y de la distancia que hay de separación entre ellas.

En el episodio 7.3.6.3 se muestra cómo los estudiantes con base en los resultados de la Fase II de la experimentación con el simulador Coulomb explican la fuerza de gravedad como una alternativa en el acto de modelar.

Episodio 7.3.6.3: La ley de Coulomb una transición para lo gravitacional
El profesor y estudiantes del ET9

Situación:	¿Con base en la práctica anterior (la fuerza entre dos cargas) podrían explicar la fuerza de gravedad?
Profesor:	*¿Es una fuerza entre ellas?*
Miguel Ángel:	Si…porque los cuerpos se atraen unos a otros…produciendo ondas gravitacionales...
Profesor:	*¿Qué pasa si están en el espacio?*
Víctor Manuel:	flotarían…por la fuerza de gravedad…por la fuerza de gravedad
Miguel Ángel:	no…en el espacio no hay gravedad…también dependen de las ondas gravitacionales…que son producidas por dos estrellas que giran entre si…producen ondas que se esparcen por el universo y que estén en constante movimiento

Análisis

El resultado de la puesta en escena de la forma alterna del diseño de aprendizaje muestra que la concepción de fuerza es la misma en ambos casos, los estudiantes consideran, que la gravedad es una fuerza, como la que hay en el fenómeno eléctrico.

Los integrantes del equipo de Miguel Ángel piensan de manera similar; las siguientes fotografías muestran como evidencia un fragmento del discurso de los integrantes del equipo ET9 del ITA figura 23.

Fig. 23: Fragmento del discurso de Francisco Javier y Miguel Ángel del equipo ET9 del ITCA, en donde consideran que la gravedad es una fuerza.

La articulación de las variables de los fenómenos, la fuerza entre dos cargas y la fuerza entre dos masas

En esta investigación, hemos teorizado sobre algunos aspectos de la modelación de fenómenos, particularmente sobre el acto de modelar; de esta manera, el acto de modelar se constituye como un acto de articulación de dos entidades para fines de intervención y el carácter de intervención, es de diversa naturaleza. Por ejemplo, desde la articulación de entes teóricos para la predicción hasta la validación de resultados teóricos obtenidos, a partir de la experimentación virtual o argumentativa de un fenómeno (Cortés, G., Arrieta, J., Tomas, E. 2014, pp. 1278-1281; Arrieta y Díaz, 2015, pp. 34-37).

De acuerdo con lo expuesto podemos decir que, durante el proceso de modelación en el acto de modelar, son las variables de interés las que se articulan en los diferentes modelos para los fenómenos en cuestión siguiendo los esquemas de la figura 24 y 25 abordados en el Capítulo 4 de esta investigación.

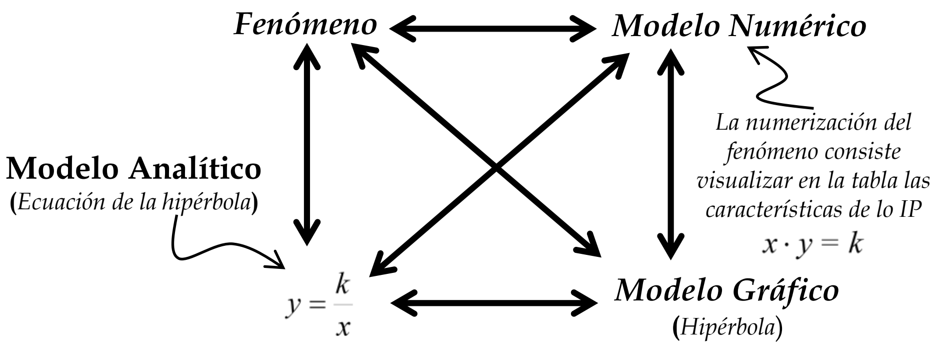


Fig. 24: Esquema del modelo propuesto para la articulación de las variables conformando una red de modelos vía la analogía.

El esquema de la figura 25 muestra la articulación de la red de modelos del fenómeno base y el fenómeno análogo durante el proceso de modelación y el acto de modelar.

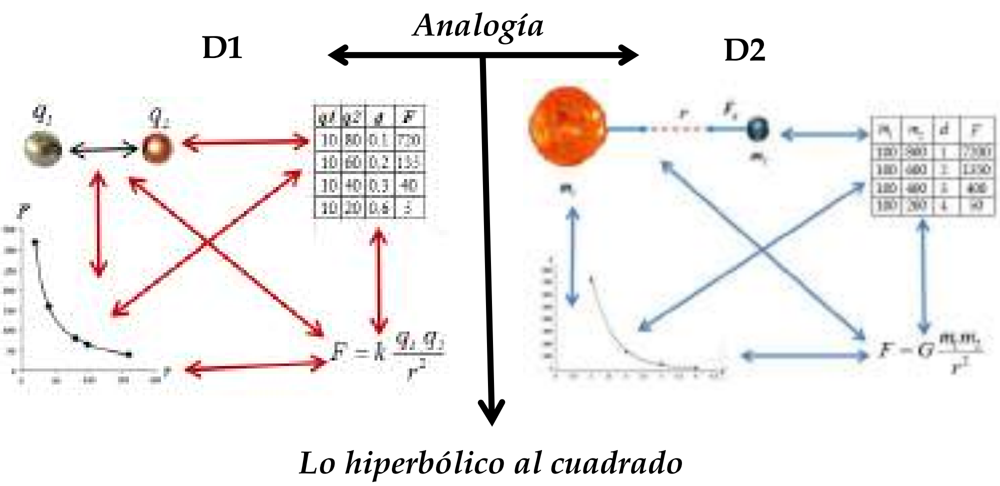


Fig. 25: Esquema del modelo propuesto para la articulación de las variables para fuerza entre dos cargas y la fuerza entre dos masas vía la analogía.

El episodio 7.4.1.1 muestra como evidencia la forma que tienen los integrantes del equipo ET8 del ITCA para articular las variables que intervienen en la experimentación discursiva de los diseños de aprendizajes en el acto de modelar. Para ello el profesor induce la actividad a través del planteamiento unas cuestiones.

Episodio 7.4.1.1: Ahhh… ¡es como lo que pasa en la ley de coulomb!

El profesor y estudiantes del ITCA ET8

Profesor: *¿Podría establecer la relación entre dos cuerpos con masa uno y masa dos, y una distancia de entre ellos?*

Delia ET8: Si profe…la fuerza de atracción entre dos cuerpos es inversamente proporcional a la distancia que los separa al cuadrado… $F = \frac{G(Mm)}{d^2}$ … $d = distancia$, $G = gravedad$: *constante gravitacional*, M y m : masa de los 2 objetos.

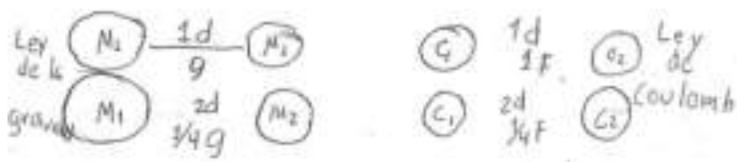


Fig. 26: Modelos pictográficos del equipo ET8, que relacionan la distancia con las cargas en el fenómeno eléctrico; la distancia con las masas en el fenómeno gravitacional.

Análisis

Las evidencias muestran, que los estudiantes del ITCA son coincidentes respecto a considerar a la gravedad como una fuerza, es decir, la masa es como las carga en el fenómeno eléctrico; si las masas están muy cerca, la fuerza es muy grande; si las masas están muy lejos, la fuerza es pequeña. Esta observación la realizan los estudiantes porque la experiencia previa con el simulador Coulomb, así sucede con el comportamiento de las cargas eléctricas.

En el caso del comportamiento de los objetos de gran tamaño es semejante al de las cargas eléctricas. En ambos casos tanto las cargas eléctricas como las masas son consideradas puntuales para que las redes de modelos ya construidas previamente por los estudiantes puedan vincularse de manera *a dhoc* en la *praxis* durante el acto de modelar; en la figura 7.67 se muestra un aspecto del acto de la modelación discursiva entre los participantes, como herramienta para la vinculación de los modelos en ambos fenómenos.

Fig. 27: Estudiantes del equipo ET10 del ITCA observando el comportamiento y discutiendo el comportamiento de las cargas uno y dos para construir la relación con las masas uno y dos en la experimentación argumentativa con base en la ley de Coulomb.

La red de lo hiperbólico al cuadrado

En el episodio 7.5.1.1 se muestra cómo los estudiantes del ITCA con base en los resultados de la Fase II de la experimentación discursiva explican la fuerza de gravedad como una alternativa en el acto de modelar figura 7.68.

Fig. 28: Estudiantes del Equipo ET9 del ITCA discutiendo los resultados del fenómeno eléctrico y gravitacional para establecer y construir la red de lo hiperbólico

El profesor plantea a los estudiantes la construcción de una red de modelos, que permita relacionar ambos fenómenos con sus modelos, a partir de los valores de la tabla de datos figura 7.69.

Variación de la masa m_2 y la distancia d

Masa (kg)		Distancia (m)	Fuerza (N)
m_1	m_2	d	F
10	10	1	
10	20	2	
10	30	3	
10	40	4	
10	50	5	

Fig. 29: Tabla propuesta para las masas 1 y 2, y la distancia d

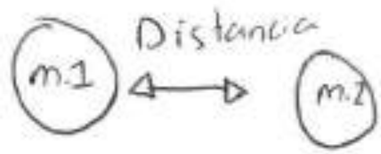
Episodio 7.5.1.1: Establecimiento de redes de modelos hiperbólicos y explicación de fenómenos a partir de este modelo

El profesor y estudiantes de los equipos ET8, ET9 y ET10 del ITA

Situación: Hagan un esquema que relacione ambos fenómenos

Marcos_ET10:

Marcos_ET9:



Marcos_ET8:

Fig. 30: Modelos pictográficos de los equipos ET10, ET9 y ET8, que relacionan la distancia con las cargas en el fenómeno eléctrico; la distancia con las masas en el fenómeno gravitacional.

En la figura 30 observamos que la construcción de la red de modelos realizada por los integrantes de los equipos, solo se limita a un modelo pictográfico, que surge a partir del discurso como herramienta en el acto de modelar en la experimentación discursiva, un fragmento del episodio 7.5.1.1 muestra evidencia de ello.

El profesor y estudiantes de los equipos ET8, ET9 y ET10 del ITA

Episodio 7.5.1.1:	**Establecimiento de redes de modelos hiperbólicos y explicación de fenómenos a partir de este modelo**
Profesor:	*¿Porque gira la luna alrededor de la tierra?*
Miguel ET9:	Porque la luna está cayendo y tiene su propia gravedad
Delia ET8:	Porque la fuerza de gravedad de la tierra se mantiene ahí, porque hay una fuerza que la atrae y otra que la expulsa. La luna y la tierra ejercen fuerzas entre sí.
Víctor ET10:	Porque la gravedad hace que no se salga de su órbita y se mantenga dando vueltas dentro de su órbita alrededor de la tierra.

Análisis

Los estudiantes de los equipos participantes coinciden en que la gravedad es una fuerza que obliga a la luna a orbitar en torno a la tierra; el equipo ET8 considera que hay una fuerza que hace que la expulse y otra que la atraiga, es decir, la tierra y la luna ejercen una fuerza entre sí, en tanto que el equipo ET10 afirma que la gravedad provoca que la luna siga una trayectoria orbital en torno a la tierra. En ambos casos, la construcción de una red de modelas solo se reduce a un pictograma, que relaciona ambos fenómenos y al discurso como herramienta.

Conclusiones

Durante la experimentación discursiva podemos decir que, el establecimiento de una red de lo hiperbólico al cuadrado descentrado de los fenómenos en el momento en que los actores utilizan los datos obtenidos de la experimentación, para intervenir en el fenómeno, se está ejerciendo la modelación y el fenómeno se convierte en lo modelado, y los datos en el modelo.

Los modelos que se articulan con los fenómenos resultan ser pictogramas, gráficas, ecuaciones, el propio lenguaje cotidiano normalmente conocido como discurso, etc. El proceso de articulación es un proceso interactivo, se propone algún modelo y se interviene con él al fenómeno, se propone otro y se vuelve a intervenir. Esto significa que el proceso de modelación es una práctica recurrente que consiste en articular dos entes para intervenir sobre uno de ellos al cual se le puede llamar lo modelado y al otro modelo. Durante este proceso en el acto de modelar emerge una red de modelos, que no están sujetos a un solo fenómeno, sino más bien es una red general de modelos, cuyos significados proviene de diversos fenómenos cuya relación, es solo de semejanza entre sus parámetros inmutables entre el fenómeno base (modelo) y el fenómeno análogo (lo modelado), para los actores que modelan, los modelos solo emergen cuando los utilizan para intervenir en lo modelado (Arrieta y Díaz, 2015, pp. 34-45)

La intención didáctica de la modelación de fenómenos a partir de un diseño de aprendizaje (práctica experimental) en contextos escolares, es que la analogía sirva como herramienta en la vinculación entre fenómeno y una red de modelos, para encontrar soluciones a problemas en contextos no escolares; otra intención es ver cómo los actores construyen sus propias herramientas, cómo modifican la práctica de modelación original, para construir otras prácticas, las cuales hemos llamado prácticas con vivencia.

En una práctica convivencia la analogía nos permite transitar de una situación conocida (fenómeno base) a otra situación desconocida (fenómeno análogo). Por ejemplo, cuando estudiamos los fenómenos relativos a las fuerzas eléctricas, a partir de la modelación vía la analogía con fuerzas gravitacionales, la problemática surgida no es simple, es compleja, entonces emergen *las funciones de la analogía* para hacer posible la modelación del fenómeno gravitacional, en nuestro caso creemos que es posible construir el modelo a partir de lo inversamente proporcional (IP) y inversamente proporcional al cuadrado (IPC) en fenómenos eléctricos y extenderlos a los fenómenos gravitacionales, solo si construimos lo hiperbólico y lo hiperbólico al cuadrado con los diseños correspondientes.

En nuestro trabajo hemos cuestionado la caracterización de los fenómenos IP cuyos referentes son del tipo lineal y cuadrático, además del discurso argumentativos de los actores al transitar de una situación contextual a otra, en donde emergen la forma de predecir elemental en situaciones que tienen regularidades constantes, es una forma simple y recurrente de predecir, y en situaciones más complejas recurren a la forma de predecir fundamental, que es una forma más generalizada en la predicción.

La analogía transporta coloquialmente, los elementos de una práctica convivenciada a elementos funcionales a una práctica emergente. Sin embargo, esta transposición no puede ser de forma mecánica, sino que solo se da respetando los elementos del contexto. Por ejemplo, aun cuando la estructura matemática, que subyace a las situaciones del tamaño de la zancada, los pintores, el vaciado del líquido de un recipiente es la misma, una situación que involucra variables inversamente proporcionales, los actores proceden con diferentes herramientas, procedimientos, argumentos diferentes en cada caso. Esto implica que hay formas de predicción inherentes a cada situación, a cada práctica convivencia para poder predecir, por eso hacemos una distinción entre la forma de predecir elemental y la forma de predecir fundamental.

La analogía nos permite modelar un fenómeno que no se encuentra en el entorno del estudiante, a partir de una red convivenciada. Para ello nos planteamos las siguientes etapas en la construcción de futuros diseños de aprendizajes y sus puestas en escena:

1. *La experimentación discursiva con el fenómeno*
2. *La identificación de las variables*
3. *La construcción de una red de lo hiperbólico al cuadrado descentrada del fenómeno.*
4. *La fuerza de la analogía se ve presente al transponer los elementos de una práctica convivencia como herramienta en una práctica emergente.*

En la praxis podemos concluir que resulta muy *ad hoc* establecer conexiones entre las características de los parámetros que describen a un fenómeno, a partir de las analogías establecidas de otros fenómenos distintos, pero cuyo comportamiento es muy similar.

Una primera conclusión, es que *la analogía se manifiesta en las acciones humanas y no en los procesos matemáticos, utiliza la experiencia previa de haber interactuado con un hecho, el cual sirve de referencia para dar solución a otro hecho cuyas características son semejantes, de ahí que a través de una comparación los actores establecen conexiones, manifestándose en estas acciones el proceso analógico, el cual a su vez tiene diversos orígenes cultural y contextual*.

De lo anterior una segunda conclusión, es que la analogía es un procedimiento mediante el cual podemos establecer diversas conexiones, de esto encontramos que:

- *Hacer conexiones es parte de los procesos naturales de descubrimiento en la analogía.*
- *Los actores que establecen conexiones construyen redes de modelos para explicar, y predecir usando analogía implícita.*
- *Distinguimos dos formas de procedimientos analógicos a partir de: la analogía sensitiva que opera a partir de la impresión directa de los fenómenos sobre nuestros sentidos, y la referida a la forma y estructura, que consiste en considerar análogos a fenómenos que tienen una naturaleza diferente, y que poseen una estructura similar o se rigen por leyes semejantes.*
- *Hay analogías de diferentes niveles, que dependen de las características de los propios fenómenos, y de la habilidad de los actores para establecer relaciones ente ellos*

Una tercera conclusión es en relación con las características de los fenómenos base y análogo, que nos permiten establecer una analogía, están referidas al comportamiento de los parámetros de los modelos asociados a los fenómenos en cuestión, de ello da cuenta Coulomb, cuando establece la ley que lleva su nombre; en esta ley se da una descripción de las partículas cuyo comportamiento es muy semejante al comportamiento de los planetas y el sol. En ambos casos, se consideran a las masas puntuales, para establecer una fuerza de atracción entre los planetas y el sol; en el caso de las fuerzas eléctricas se consideran a las masas de las partículas puntuales.

En un segundo método experimental Coulomb utilizó un globo de 1 y 2 pies de diámetro para determinar la ley, según la cual el globo atrae a un pequeño cuerpo cargado de electricidad de una naturaleza diferente a la suya, en la figura 8.4 se muestra la balanza del experimento. (Cortés, 2016, pp.210-212)

Una cuarta conclusión la visualizamos sobre la función específica del uso de la analogía en la modelación matemática de fenómenos en Cortés (2016, pp. 213-214) afirma que:

> *[…] para un matemático la modelación la concibe desde la perspectiva filosófica de la matemática y de sus fundamentos, en estas perspectivas los matemáticos trabajan con modelos formales que justifican una teoría propiamente matemática haciendo uso de axiomas estableciendo relaciones entre los conceptos derivados de ellos dando origen a nuevos teoremas y teorías matemáticas. Para un físico los modelos matemáticos solo son referentes, que dan cuenta de ciertos patrones de comportamiento de los fenómenos naturales que les interesa investigar, como es la ley de gravitación universal y que está en constante cambio debido al avance tecnológico, que permite modificar la teoría física; de igual forma sucede con los patrones de comportamiento de sistemas biológicos, que solo son comprendidos por las comunidades de biólogos si se encuentra un modelo matemático que los describa.*

Una quinta conclusión esta referida al nacimiento de la analogía, es decir, en nuestra investigación la modelación matemática de fenómenos en diversos contextos está referida a las prácticas realizadas por ciertas comunidades de profesionistas y de oficios, y cómo emigran estas prácticas a otras comunidades para dar solución a problemas que guardan una cierta similaridad en sus parámetros que los determinan con los problemas que le dieron origen en las comunidades de dónde provienen.

Por último, una sexta conclusión está refería a cómo es utilizada la analogía por los estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico Campus Acapulco. En relación con el uso de la analogía, el papel que desempeña la modelación en contextos escolares radica en:

- *La intención didáctica de la modelación de fenómenos a partir de un diseño de aprendizaje (práctica experimental), en donde la analogía sirva como una herramienta en la vinculación entre fenómeno y una red de modelos, para encontrar soluciones a problemas en contextos no escolares.*
- *Observar cómo los actores construyen sus propias herramientas, cómo modifican la práctica de modelación original, para construir otras prácticas, las cuales hemos llamado prácticas con vivencia.*

Referencias

Acevedo, J. M. (2004), *El papel de las analogías en la creatividad de científicos: la teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias*, Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias (2004), Vol. 1, Nº 3, pp. 188-205 ISSN 1697-011X.Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/920/92001304.pdf

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18 (1)*, pp. 19-48. Recepción: Septiembre 18, 2013 / Aceptación: Octubre 27, 2014. DOI: 10.12802/relime.13.1811. Recuperado de ttps://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000100002

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Berciano, M. (1992). ¿Qué es realmente el “Daisein” en la filosofía de Heidegger? Thémata. Revista de Filosofía. Número 10, 1992, pág. 435-450. Recuperado de https://institucional.us.es/revistas/themata/10/04%20berciano.pdf

Berciano, M (1990). La crítica de Heidegger al pensar occidental. Universidad Pontificia de Salamanca, Salamanca, pág. 135-152.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona España: Editorial Gedisa, S. A.

Cortés, G. (2016). *La analogía en la construcción de redes de modelos, el caso de las leyes de Coulomb y de Gravitación Universal*. Tesis doctoral no publicada. Unidad Académica de matemáticas. Universidad autónoma de Guerrero. México.

Cortés, G. (2013). La analogía, una fase de la modelación. *Acta de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*, pp. 1277-1287. Argentina: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5918/1/CortesLaanalogiaALME2014.pdf

Cortés, G; Arrieta, J; Torres, E. (2014). La analogía, una fase de la modelación. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1277-1287). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5918/

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press. Recuperado de https://assets.cambridge.org/97805218/45540/frontmatter/9780521845540_frontmatter.pdf

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia al modelar linealmente situaciones análogas*. Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de matemáticas. Universidad autónoma de Guerrero. México.

Olea, N. (2011). *Un estudio del papel de los contextos en la modelación inversamente proporcional.* Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de matemáticas. Universidad autónoma de Guerrero. México.

Oliva, J. M. (2008). Qué conocimientos profesionales deberíamos tener los profesores de ciencias sobre el uso de analogías. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias., Vol. 5. Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia: EUREKA, España., pp. 15-28. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/920/92050103.pdf

Revista MICA.
Volumen 6 No. 11.
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero - Julio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 41 - 50
Recibido: enero 16 de 2023
Aprobado: febrero 19 de 2023

La geometría dinámica en el aprendizaje del comportamiento de funciones por medio de la visualización

Dynamic geometry in learning the behavior of functions through visualization

Amín Bahena Salgado
Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Acapulco
amin.bs@acapulco.tecnm.mx

Cesilio Grande Tecorral
Universidad Autónoma de Guerrero
cesiliogrande22@hotmail.com

Gildardo Cortés Bello
Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Acapulco
gildardo.cb@acapulco.tecnm.mx

Noé Castellanos Rebolledo
Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Acapulco
noe.cr@acapulco.tecnm.mx

La geometría dinámica en el aprendizaje del comportamiento de funciones por medio de la visualización

Dynamic geometry in learning the behavior of functions through visualization

Resumen

Los programas de geometría dinámica aportan nuevas posibilidades a la actividad del docente al agregar un elemento importante en la comprensión de los contenidos matemáticos, éste es la visualización de los objetos matemáticos en un sentido dinámico.

El objetivo de este escrito es: mostrar la incidencia de la visualización en la comprensión del comportamiento de funciones al variar los parámetros de su expresión algebraica.

Este trabajo de investigación se centra en actividades realizadas con alumnos de cálculo diferencial del Instituto Tecnológico de Acapulco al abordar el tema relacionado con funciones, siendo este contenido un requisito previo al tratamiento de límites y por supuesto al tema de derivadas. Las prácticas se realizaron en el Laboratorio Virtual de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Acapulco y teniendo como metodología el uso de un diseño de aprendizaje que sirve de guía para que el estudiante explore la relación existente entre una expresión algebraica y su gráfica correspondiente utilizando el software de geometría dinámica Geogebra por ser un software libre.

Con la implementación de estas prácticas se han obtenido resultados significativos al momento de llegar al punto crucial de cálculo diferencial, que es el cálculo de derivadas, pues el conocimiento del comportamiento de las funciones facilita al estudiante el determinar si el resultado obtenido es correcto en la resolución de problemas en este curso.

Como conclusión se puede mencionar que la geometría dinámica se utiliza como recurso didáctico en la comprensión de conceptos abstractos y para la elaboración de materiales educativos tanto estáticos como dinámicos según las estrategias de enseñanza del docente de matemáticas.

Palabras clave: Geometría dinámica, visualización, funciones

Abstract

Dynamic geometry programs bring new possibilities to the teacher's activity by adding an important element to the understanding of mathematical contents, namely the visualization of mathematical objects in a dynamic sense.

The objective of this paper is: to show the incidence of visualization in the understanding of the behavior of functions by varying the parameters of their algebraic expression.

This research work focuses on activities carried out with students of differential calculus of the Instituto Tecnológico de Acapulco when approaching the subject related to functions, being this content a prerequisite to the treatment of limits and of course to the subject of derivatives. The practices were carried out in the Virtual Laboratory of Basic Sciences of the Instituto Tecnológico de Acapulco and having as methodology the use of a learning design that serves as a guide for the student to explore the existing relationship between an algebraic expression and its corresponding graph using the dynamic geometry software Geogebra because it is a free software.

With the implementation of these practices, significant results have been obtained at the time of reaching the crucial point of differential calculus, which is the calculation of derivatives, since the knowledge of the behavior of the functions facilitates the student to determine if the result obtained is correct in the resolution of problems in this course.

In conclusion, it can be mentioned that dynamic geometry is used as a didactic resource in the understanding of abstract concepts and for the elaboration of both static and dynamic educational materials according to the teaching strategies of the mathematics teacher.

Keywords: Dynamic geometry, visualization, functions

Introducción

El impacto de las tecnologías en las nuevas generaciones caracteriza el quehacer del docente en la evolución de sus prácticas para adaptarlas a estas nuevas tendencias y que representan un reto para quienes pretenden aprovechar las bondades de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la enseñanza aprendizaje de los contenidos matemáticos.

La geometría dinámica puede ser utilizada como un recurso didáctico para el análisis de conceptos matemáticos a partir de sus propiedades geométricas, ya sea en imágenes estáticas o dinámicas. Existen diversos programas de geometría dinámica como Cabri, Geonext, Regla y compás, CarMetal, Geogebra, entre otros. Para esta actividad se eligió Geogebra por ser un software libre, en primer lugar, además de ser potencialmente suficiente en la didáctica y muy versátil, pues puede ser utilizado para la enseñanza aprendizaje de Geometría, Álgebra, Cálculo y Estadística. Este programa contiene vista algebraica, vista gráfica y vista de hoja de cálculo, que al vincularse dinámicamente pueden mostrar la representación del objeto en cada una de las vistas.

La geometría dinámica aún sigue siendo un recurso didáctico poco utilizado, tal vez por el desconocimiento de las ventajas que ofrece o porque algunos docentes se resisten a modificar su práctica docente aprovechando en menor medida las TIC's. Es en este entorno donde el docente y sus alumnos ponen en juego sus conocimientos de geometría para que las imágenes construidas conserven sus propiedades al aplicar el "arrastre", como lo menciona Mora (2007):

Los programas de Geometría dinámica son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas con figuras dinámicas. El problema del uso de este tipo de programas podría consistir en que basta con una acción de ratón para que se visualicen todas las propiedades de la figura y ya no haya que pensar más. Desde ese punto de vista, el trabajo del profesor consiste en diseñar actividades o prácticas para que el estudiante explore propiedades y conceptos.

El uso de la Geometría Dinámica se puede extender a la resolución de problemas mediante la construcción de figuras geométricas que se correspondan con el manejo de las variables contenidas en el problema. Ahora se nos presentan en
forma de animaciones que nos permiten observarlas desde distintos puntos de vista e incluso nos permiten interactuar con ellas al modificar ciertas condiciones en el diseño y analizar qué es lo que ocurre (Mora, 2007).

Metodología

El docente adapta sus necesidades a las condiciones que se brinden en el centro de trabajo, pudiendo llevar a cabo la actividad con una sola computadora y un proyector o en una sala de cómputo para el trabajo individual o por equipo.

Para el caso mostrado se llevó a cabo la práctica en el Laboratorio Virtual de Ciencias Básicas.

Figura 1. Estudiantes en la práctica

Resultados y Conclusiones

La tecnología, por sí sola, no es suficiente para la construcción del conocimiento. Para este efecto se conjugan el rol del profesor, el rol del estudiante, la metodología, los recursos didácticos y el material didáctico.

A continuación, se describen, a grandes rasgos, las acciones que componen la metodología para lograr la comprensión de los efectos que ejercen los parámetros de la ecuación de una función y su gráfica:

- Previo a la actividad se instala el programa de geometría dinámica GeoGebra. De preferencia hay que asegurarse de contar con la versión más reciente
- Si es posible, se asigna un ordenador a cada estudiante participante. De otra manera se pueden hacer equipos de trabajo de la menor cantidad de alumnos posibles, dependiendo de las posibilidades o disponibilidad de equipo del centro de cómputo donde se realiza la actividad.
- Se asegura el nivel de partida al dar instrucciones sobre el uso del programa de geometría dinámica, especialmente en el uso de deslizadores y en la introducción de expresiones algebraicas para ser graficadas.

— Se proporciona un documento consistente en el análisis de funciones, donde está escrita la expresión algebraica con parámetros a, b, c, …, junto con preguntas para ser contestadas observando el comportamiento de la gráfica de la función al variar los parámetros. La expr4esión algebraica se relaciona con una figura elaborada con el software de Geometría Dinámica a la que se le ha introducido la expresión que obedece a deslizadores a, b, c, …
— El estudiante contesta a las preguntas planteadas en el diseño de aprendizaje tras la exploración manipulando los deslizadores que representan los parámetros de la ecuación de la función.
— Se manipulan los deslizadores y se observa el comportamiento de la gráfica.
— Se comparten los resultados con el grupo, siendo el docente quien coordina la actividad.
— El docente recapitula el comportamiento de las gráficas de las funciones al variar los parámetros de su expresión algebraica, haciendo uso de conceptos como monotonía, dominio y rango de una función, asíntotas y traslación.

En esta actividad se contó con un aula del Laboratorio Virtual de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Acapulco, la cual está dotada, en cada sala, de 20 ordenadores en buenas condiciones de servicio, a las que se les instaló el programa de geometría dinámica GeoGebra versión 5.0.280.0 que ya cuenta con la posibilidad de graficar en tres dimensiones.

Análisis de datos

El diseño de aprendizaje se enfoca en comprender el comportamiento de una gráfica al variar los parámetros de la expresión algebraica de una función. Para este fin se elaboró un documento que el estudiante debía contestar manipulando deslizadores (herramienta de Geogebra) que modifican los parámetros de la ecuación de una función, para lo cual se propusieron las siguientes funciones:

$ax + b$

$a(x-b)^2+c$

ax^2+bx+c

$a\ sen\ (b(x-c))+d$

$a\ cos\ (b(x-c))+d$

$a\ ln(x-b)+c$

Como ejemplo se muestra la figura para explorar la función $sen\ (x)$ con los respectivos parámetros.

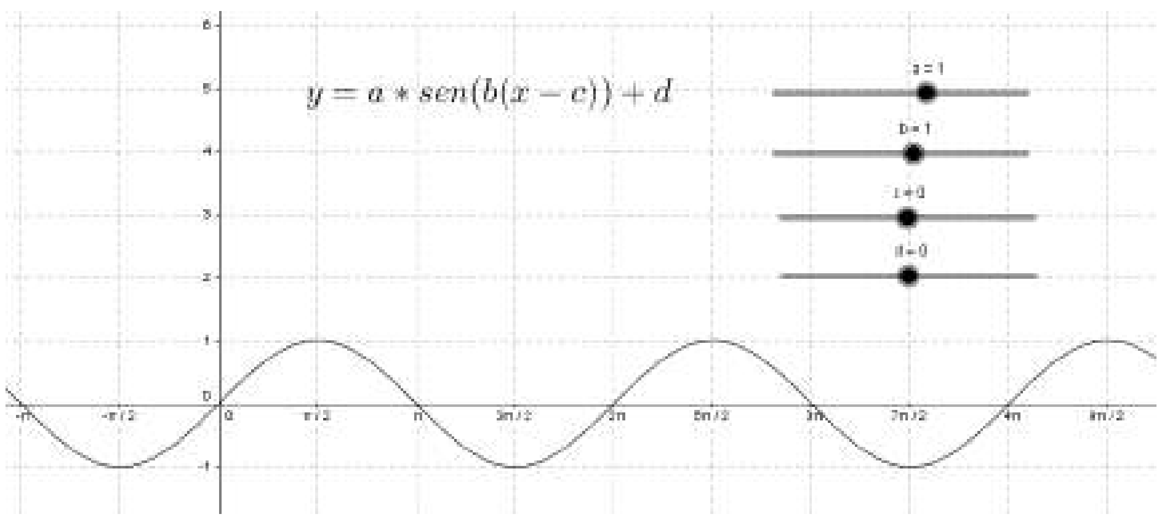


Figura 2. Gráfica de la función *sen (x)*

A continuación se muestran algunas de las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionárseles sobre sus observaciones en el comportamiento de la gráfica al manipular .los parámetros de la expresión algebraica en una forma propuesta en el diseño de aprendizaje.

La gráfica se relaciona con la ecuación de la forma $\mathrm{y = a\ sen(b(x-c)) + d}$
¿Qué tipo de gráfica es?

— Es la función seno

— Es una sinusoidal

¿Qué hace el parámetro “a” a la gráfica?

— La hace más grande

— La estira hacia arriba y hacia abajo

— La estira o la comprime verticalmente

— Cuando cambia de signo la cambia para abajo

¿Qué hace el parámetro “b” a la gráfica?

— La alarga o la acorta hacia los lados como acordeón

— La estira o la comprime horizontalmente

— Aumenta o disminuye la cantidad de ciclos

¿Qué hace el parámetro “c” a la gráfica?

— La mueve hacia los lados

— La mueve a la izquierda y hacia la derecha

— La desplaza horizontalmente

¿Qué hace el parámetro “d” a la gráfica?

— La mueve hacia arriba y hacia abajo

— La sube y la baja

— La desplaza verticalmente

Escribe la ecuación cuando a=1, b=1, c=0, d=0. Para esta ecuación indica el intervalo de un periodo de la gráfica.

— sen x de 0 a 2π

— 1 sen (1 (x-0)+0= sen (x). El intervalo de un periodo es de 0 a 2π

Escribe la ecuación cuando a=1, b=1, c=1.571, d=0. ¿Con qué otra función trigonométrica se corresponde?

— Con cos (x)

— Con el coseno

Escribe la ecuación cuando

a=3, b=-2, c=0, d=-1.

— 3 sen(-2(x-1.57))

— 3 sen(-2(x-1.57))+0

¿Qué parámetro modifica la amplitud de la gráfica?

— La “a”

— El parámetro a

¿Qué parámetro modifica la frecuencia de la gráfica?

— El parámetro b

¿Qué parámetro desplaza la gráfica horizontalmente?

— El parámetro c

¿Qué parámetro desplaza la gráfica verticalmente?

— El parámetro d

Las respuestas pueden no corresponderse al lenguaje matemático adecuado pero muestra que con sus propias palabras, el estudiante analizó el comportamiento de las funciones a partir de la manipulación de los parámetros representados por los deslizadores del programa Geogebra. Cabe destacar que su respuesta estuvo acompañada de movimientos con los brazos para describir el comportamiento de las gráficas.

La sesión de una hora no es suficiente para la total exploración de las funciones representadas gráficamente, por lo que se puede optar en aumentar la cantidad de sesiones o en complementar la actividad como trabajo en casa. La posibilidad de descargar el programa de manera libre hace alcanzable el logro de los objetivos de aprendizaje al no haber impedimento para la instalación en el equipo de cómputo de cada estudiante.

Como resultado de la actividad se logró que los estudiantes comprendieran el comportamiento de las funciones con respecto de su representación gráfica, siendo esto aprovechado en el tema mismo y en los temas posteriores que requieren de este conocimiento.

Conclusiones

Existen varios programas de geometría dinámica. La elección de uno entre ellos dependió de la accesibilidad al alcance del estudiante y para este fin se eligió el software de Geometría Dinámica Geogebra por ser de uso libre. Tal vez no sea el que tenga mejores herramientas, pero es suficiente para su aplicación didáctica en el aula y para que el estudiante realice sus tareas en casa.

El programa de geometría dinámica no enseña matemáticas, es el usuario quien dispone de sus conocimientos en matemáticas para la construcción de figuras que le permitan visualizar un concepto específico, logrando un conocimiento significativo.

El comportamiento de una gráfica a partir de la variación de los parámetros de la expresión algebraica de una función brinda las condiciones para abordar los contenidos del cálculo con mejor aptitud y actitud hacia las actividades escolares.

La intención de utilizar la visualización de los objetos matemáticos es la apropiación de los conocimientos que propicie la abstracción de los conceptos.

El trabajo colaborativo para llevar a cabo la actividad propuesta brinda la oportunidad de fomentar la argumentación entre los estudiantes. Si la actividad se realiza en el trabajo individual, esto no debe quedar ahí, los resultados se deben socializar entre el grupo para compartir experiencias y resaltar lo que podría no ser evidente para algunos.

El profesor tiene que institucionalizar los conocimientos construidos por los estudiantes con la intención de formalizar el aprendizaje al referirse a los conceptos de manera adecuada.

El presente trabajo abre la perspectiva de la utilidad del uso de software como herramienta didáctica.

Referencias

Mora Sánchez, J. A. (2007). Geometría Dinámica en Secundaria. *XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*. Granada. [Consulta: 20 de noviembre 2022]. Disponible en: http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007_granada_JAMora.pdf

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. (2009). *Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2* [Consulta: 20 de noviembre 2022]. Disponible en: http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1288201171_docues.pdf

Revista MICA.
Volumen 6 No. 11.
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero - Julio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 51 - 60
Recibido: abril 03 de 2023
Aprobado: mayo 17 de 2023

El análisis de gráficos como apoyo en la modelación de funciones no lineales

Graph analysis as support in the modeling of nonlinear functions

José Trinidad Ulloa Ibarra
jtulloa@uan.edu.mx
UAN

Nidia Dolores Uribe Olivares
nidiadolores.uribe.cb100@dgeti.sems.gob.mx
CBTis No.100

Juan Felipe Flores Robles
juan.f10res@hotmail.com
Universidad Univer Nayarit

El análisis de gráficos como apoyo en la modelación de funciones no lineales

Graph analysis as support in the modeling of nonlinear functions

Resumen

Se presenta el avance de una investigación en curos cuyo es utilizar las ventajas del análisis gráfico como apoyo para la comprensión y aprendizaje de los modelos no lineales con lo que se tratará de dar respuesta a la pregunta: ¿El análisis gráfico basado en el uso de métodos cualitativos puede ser una herramienta eficaz para estudiantes de licenciatura que no cursan ecuaciones diferenciales? Se utilizan los marcos teóricos las teorías de la percepción visual, la teoría de la modelación matemática y la teoría de la socioepistemología y como metodología se utiliza la ingeniería didáctica. La propuesta será puesta en escena con un grupo de 10 estudiantes de licenciatura; el resultado esperado es comprobará su factibilidad al determinar el nivel de comprensión gráfica que logren los estudiantes

Palabras clave: gráficos, análisis, modelación, funciones

Abstract

The progress of a research in courses is presented, which is to use the advantages of graphical analysis as support for the understanding and learning of nonlinear models, with which it will try to answer the question: Does graphical analysis based on the use of qualitative methods can be an effective tool for undergraduate students who do not take differential equations? The theoretical frameworks of the theories of visual perception, the theory of mathematical modeling and the theory of socioepistemology are used, and didactic engineering is used as a methodology. The proposal will be staged with a group of 10 undergraduate students; The expected result is to verify its feasibility by determining the level of graphic comprehension that the students achieve

Keywords: graphics, analysis, modeling, functions

Introducción

La modelación matemática es el proceso de representar un fenómeno real mediante ecuaciones, funciones, gráficas u otros elementos matemáticos. La modelación matemática tiene una gran importancia en el estudio de crecimiento de seres vivos ya que permite:

- Analizar las relaciones biométricas de las especies, es decir, cómo varían el peso, la longitud y el volumen en función del tiempo y de las condiciones ambientales. En la gestión pesquera, los profesionistas del área utilizan modelos de crecimiento para predecir el tamaño de las poblaciones de peces. Esta información se puede utilizar para establecer cuotas y otras regulaciones para garantizar que las poblaciones de peces sean sostenibles.

- Determinar los modelos de crecimiento más adecuados para cada especie, utilizando criterios estadísticos y biológicos.
- Predecir el tamaño y la edad de las especies en diferentes momentos y lugares, lo que ayuda a planificar las estrategias de pesca responsable y sostenible.
- Estudiar el impacto de factores como la temperatura, la salinidad, la alimentación, la competencia y la depredación en el crecimiento de los peces. Los profesionales del área han descubierto que las tasas de crecimiento de los peces son generalmente más altas a temperaturas más cálidas. Sin embargo, hay un punto en el que la temperatura se vuelve demasiado alta y las tasas de crecimiento disminuyen. Esto se debe a que las altas temperaturas pueden estresar a los peces y hacerlos más susceptibles a las enfermedades, pero además las tasas de crecimiento de los peces son generalmente más bajas en aguas más salinas. Esto se debe a que el agua salada puede dificultar la osmorregulación de los peces o mantener el equilibrio adecuado de agua y sal en sus cuerpos. Al comprender los factores que afectan el crecimiento de los peces, los científicos pueden ayudar a garantizar que las poblaciones de peces sean saludables y sostenibles.
- Optimizar el diseño y el abastecimiento de las cadenas agroalimentarias que involucran productos pesqueros, considerando los costos, los tiempos de entrega y los impactos ambientales.

Es decir, la modelación matemática es una herramienta que facilita el tratamiento de datos y la toma de decisiones complejas en el ámbito de la acuicultura y la pesca. Además, contribuye al desarrollo científico y tecnológico del sector agrícola en diferentes países.

Por otra parte, los modelos de crecimiento de saturación o sigmoidales son utilizados en diversas áreas como la biología, la economía, la química, entre otras. Estos modelos se utilizan para describir el crecimiento de una población o sistema que alcanza una capacidad máxima o saturación. Algunos de los modelos más comunes son: Modelo logístico, Modelo de crecimiento de Gompertz, Modelo de crecimiento de Richards

Los modelos de crecimiento de saturación son no lineales, lo que puede dificultar su análisis matemático y estadístico. Por lo tanto, con frecuencia es útil linealizar estos modelos para hacerlos más manejables. Una herramienta que permite lo anterior es el análisis gráfico que puede ser muy útil para quienes no tengan un conocimiento adecuado de las ecuaciones diferenciales.

El análisis gráfico es una metodología esencial en la modelación matemática. Los gráficos pueden ayudar a visualizar los datos, identificar relaciones no lineales, validar el modelo y comunicar los resultados. Para realizar este análisis conviene utilizar métodos cualitativos, ya que éstos proporcionan enfoques y técnicas para interpretar y comprender la información visual y/o gráfica de forma tal que, centrándose en las características, patrones y otros significados asociados a los gráficos, es posible prescindir de las medidas numéricas precisas.

Además, los métodos cualitativos de análisis gráfico son muy importantes para la interpretación de datos experimentales y la determinación de relaciones o regularidades implícitas en ellos. Esto se debe a que estos métodos permiten al investigador visualizar los datos de manera clara y efectiva, lo que a su vez facilita la identificación de patrones y tendencias en los datos.

Los métodos cualitativos en el análisis gráfico se enfocan en interpretar y comprender la información visual a través de técnicas de observación y análisis de formas, patrones, colores, disposición espacial y contexto. Estos enfoques pueden proporcionar una comprensión más profunda de los datos y las relaciones subyacentes que los métodos cuantitativos por sí solos no pueden capturar.

Algunas de las técnicas utilizadas en los métodos cualitativos en el análisis gráfico incluyen:

1. Análisis de formas: Se refiere a la observación y el análisis de las formas y configuraciones presentes en el gráfico, como líneas rectas, curvas, círculos, entre otros. Se busca identificar patrones visuales y relaciones implícitas.

2. Análisis de patrones: Se centra en la identificación y la interpretación de los patrones recurrentes presentes en el gráfico. Puede implicar la identificación de tendencias, ciclos, agrupamientos o distribuciones particulares en los datos representados.

3. Análisis de colores y elementos visuales: Considera el uso de colores, tonos, sombras y otros elementos visuales presentes en el gráfico para comprender su impacto en la representación de la información. Los colores y otros elementos pueden transmitir significados y relaciones específicas.

4. Análisis de disposición espacial: Examina cómo se organizan y se disponen los elementos en el gráfico. Esto incluye la distribución de los datos a lo largo de los ejes, la colocación de las etiquetas y la disposición de los elementos gráficos, como barras, puntos o líneas.

5. Análisis de contexto y contenido: Considera el contexto en el que se presenta el gráfico y el contenido específico que se representa. Esto implica tener en cuenta el propósito del gráfico, el tipo de datos utilizados y la audiencia a la que va dirigido, para comprender mejor su significado

Estos métodos también pueden ayudar a identificar valores atípicos o puntos de datos que pueden estar influyendo en los resultados generales del estudio. Al mismo tiempo, estos métodos pueden ayudar a detectar posibles errores en la recopilación de datos o en el análisis estadístico, lo que puede mejorar la precisión y la confiabilidad de los resultados.

El análisis visual proporciona una comprensión intuitiva y ayuda a extraer información valiosa de los modelos sigmoidales, complementa además las técnicas cuantitativas y proporciona una comprensión más intuitiva de los resultados obtenidos a partir de estos modelos.

El objetivo del trabajo es presentar las ventajas del análisis gráfico como apoyo para la comprensión y aprendizaje de los modelos no lineales con lo que se tratará de dar respuesta a la pregunta: ¿El análisis gráfico basado en el uso de métodos cualitativos puede se una herramienta eficaz para estudiantes de licenciatura que no cursan ecuaciones diferenciales?

Marco Teórico

Los marcos teóricos que se pueden utilizar para sustentar la importancia del análisis gráfico en la interpretación de datos experimentales y modelos matemáticos son entre otros:

1. Teoría de la percepción visual, la cual sugiere que muchas personas procesan la información visual de manera más efectiva que la información textual o numérica. Por lo tanto, el uso de gráficos puede mejorar la comprensión y la interpretación de los datos experimentales y modelos matemáticos.

2. Teoría de la cognición situada, que sustenta que el conocimiento está enraizado en la experiencia y la acción en el mundo real. Los gráficos pueden ayudar a los investigadores a contextualizar los datos experimentales y modelos matemáticos, lo que puede mejorar la comprensión y la interpretación.

3. Teoría de la comunicación científica, que establece que la comunicación efectiva de la información científica es esencial para la toma de decisiones informadas. Los gráficos pueden ayudar a comunicar de manera clara y efectiva los datos experimentales y modelos matemáticos a un público no especializado.

4. Teoría de la modelación matemática, la que sugiere que la construcción de modelos matemáticos es un proceso iterativo que requiere una comprensión profunda de los datos y la interpretación adecuada de los resultados del modelo. El análisis gráfico es esencial en este proceso, ya que permite la visualización y la interpretación de los datos experimentales y modelos matemáticos.

El presente trabajo lo sustentamos en las teorías de la percepción visual, la teoría de la modelación matemática y la teoría de la socioepistemología. La teoría de la percepción visual ha sido estudiada por muchos autores a lo largo del tiempo, por lo que no hay un único autor que la haya desarrollado. Sin embargo, hay varios investigadores cuyas contribuciones han sido fundamentales en el desarrollo de esta teoría.

Algunos de los autores más importantes en el campo de la percepción visual incluyen a: David Marr, (1982); Richard Gregory, (1966); a los Gestaltistas Max Wertheimer, Wolfgang Köhler y Kurt Koffka; James J. Gibson. Con base en sus trabakos y para fines de en este trabajo se infiere de los anteriores que:

La teoría de la modelación matemática ha sido desarrollada por muchos autores a lo largo del tiempo, y su origen se remonta al menos al siglo XVII con las contribuciones de matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Sin embargo, algunos de los autores más influyentes en este campo incluyen: George Polya, John von Neumann, Alan Turing, Norbert Wiener.

Estos investigadores han realizado importantes contribuciones a la comprensión de cómo se puede utilizar las matemáticas para modelar sistemas y fenómenos complejos, y han sentado las bases para la aplicación de la modelación matemática en una amplia variedad de campos, desde la física y la ingeniería hasta la biología y las ciencias sociales.

Cantoral, et. al. (2015), mencionan que la Socioepistemología nace en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de los ochenta y se extiende hacia Latinoamérica y otras latitudes durante los noventa con el objetivo de atender colectivamente un problema mayor: explorar formas de pensamiento matemático, fuera y dentro del aula, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población. Sabíamos desde el principio que la manera de enseñar está estructurada por prácticas de enseñanza instituidas (la acción didáctica en: aula, familia, comunidad, escuela o vida cotidiana, entre otros) y que esto, a su vez, es estructurante de la socialización del conocimiento y, en consecuencia, de los procesos de pensamiento involucrados. En (Cantoral y Farfán, 2003, 2004) se proclama aquello que se tornaría en consigna: *no más una didáctica sin alumnos, pero menos aún una didáctica sin escenarios socioculturales.* El nuevo reto era entonces mudar la mirada, del *objeto* a las *prácticas.*

La Socioepistemología se propone recurrir a las gráficas como elemento de argumentación en situaciones concretas, para conducir la generación de conocimiento. Este se construye vía la argumentación gráfica y la creación de modelos de gráficas. La argumentación gráfica funciona como el hilo constructor del conocimiento matemático y de la funcionalidad, para la creación de un modelo gráfico para diferentes conceptos dados habitualmente vía fórmulas o expresiones analíticas.

Cantoral y Montiel (2001) dicen que: "Se entiende por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual"

Metodología

La metodología que se utilizará es la ingeniería didáctica ya que es de gran utilidad para analizar situaciones didácticas en la educación matemática a través de un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Esto implica un análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, experimentación y análisis a posteriori con la evaluación, de Faria (2006).

La ingeniería didáctica puede mejorar la enseñanza de las matemáticas al analizar situaciones didácticas y optimizar los modos de apropiación del saber por el sujeto. Al utilizar esta metodología, los docentes pueden mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas al adaptar su enfoque a las necesidades específicas de sus estudiantes, de Faria (2006).

La propuesta será puesta en escena con un grupo de 10 estudiantes de la licenciatura en ingeniería pesquera de la universidad autónoma de Nayarit, los que tienen como antecedentes los cursos de lenguaje y pensamiento matemático y modelación matemática, en esta última es donde se detectó la ausencia de algún curso de ecuaciones diferenciales. El citado curso se basó en la linealización de los modelos sigmoidales por medio del uso de logaritmos.

Con relación a las variables de investigación se trabajará en torno a las siguientes: como variables dependientes se tomarán el nivel de comprensión gráfica, la habilidad para identificar patrones y para realizar predicciones; Como variables independientes se tomará el uso de recursos de aprendizaje y la experiencia previa.

Con relación a los instrumentos para la recolección de información se privilegiará el uso de pruebas y tareas de los análisis gráficos que realicen los estudiantes. Además, se diseñarán cuestionarios o encuestas que contengan preguntas relacionadas con la comprensión gráfica, la identificación de patrones y la capacidad para realizar predicciones.

Se utilizará la prueba t de Student para comparar la comprensión gráfica antes y después de la utilización de la propuesta es decir antes de realizar los análisis gráficos con base en métodos cualitativos para evaluar si hay diferencias significativas antes y después de la puesta en escena.

Resultados Esperados y Conclusiones

Como resultado de la ejecución de la propuesta se comprobará su factibilidad al determinar el nivel de comprensión gráfica que logren los estudiantes, lo que se medirá a través de pruebas, cuestionarios y tareas específicas; de igual manera se identificará la habilidad que logren para realizar predicciones razonables al trabajar con los modelos sigmoidales., lo que puede involucrar patrones en la capacidad de interpretar las gráficas.

Se analizará la relación entre las variables independientes y las dependientes con la intención de medir su correlación, por ejemplo, la experiencia previa con la habilidad para realizar predicciones, lo que indicará si los estudiantes con mayor experiencia previa en el análisis gráfico tienen una mayor capacidad para realizar predicciones basadas en los datos proporcionados.

Basados en los resultados se podrán identificar los factores que influyen en la comprensión gráfica de los modelos sigmoidales lo que incide en la enseñanza y el diseño de materiales educativos relacionados con el análisis gráfico. Esto representa una oportunidad para identificar las áreas en las que los estudiantes presentan dificultades y requieren un enfoque de enseñanza más específico con lo que se pueden hacer propuestas para mejorar la enseñanza del análisis gráfico en los modelos sigmoidales.

Referencias

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53(3)*, 255-270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 24(2.3), 137-168.

Cantoral, R.; Montiel, G. , Reyes-Gasperini, D.. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. Relime vol.18 no.1 Ciudad de México mar. 2015

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Pearson Educación

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Año 1, Número 2

Marr, D. (1982). Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information. Cambridge. Massachusets. The MIT Press. 2010. [La visión. Alianza Editorial. Madrid. 1985.]

Gregory, R. (1966). Eye and Brain: The Psychology of Seeing.Weidenfeld and Nicolson, London.

Wertheimer, M. (1950). Gestalt theory. A source book of Gestalt psychology. Rothledge and Kegan Paul.

Revista MICA.
Volumen 6 No. 11.
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero - Julio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 61 - 71
Recibido: febrero 15 de 2023
Aprobado: abril 19 de 2023

Mejoras significativas en el rendimiento académico basadas en estrategias de trabajo autónomo para estudiantes de licenciatura

Significant improvements in academic performance based on autonomous work strategies for undergraduate students

Elsa García de Dios
elsa.garcia@uan.edu.mx
ENIP – UAN

Nidia Dolores Uribe Olivares
nidiadolores.uribe.cb100@dgeti.sems.gob.mx
CBTis No.100

Nadia Sarahi Uribe Olivares
nadia.uribe@uan.edu.mx
UAN

José Trinidad Ulloa Ibarra
jtulloa@uan.edu.mx
Universidad Autónoma de Nayarit

Mejoras significativas en el rendimiento académico basadas en estrategias de trabajo autónomo para estudiantes de licenciatura

Significant improvements in academic performance based on autonomous work strategies for undergraduate students

Resumen

Se presentan resultados de un trabajo de investigación con estudiantes de la licenciatura en ingeniería pesquera de la Universidad Autónoma de Nayarit, cuyo objetivo fuer hacer y ejecutar mejoras para la mejora del rendimiento académico con base en estrategias de trabajo autónomo, se trató de dar respuesta a la pregunta de cómo impacta la implementación de estrategias y cuyos resultados por medio de la aplicación de instrumentos es que si se registra una mejora significativa al aplicarlas.

Palabras clave: mejoras, rendimiento, estrategias, aprendizaje autónomo

Abstract

Results of a research work with students of the degree in fisheries engineering from the Autonomous University of Nayarit are presented, whose objective was to make and execute improvements to improve academic performance based on autonomous work strategies, trying to respond to The question of how the implementation of strategies impacts and whose results through the application of instruments is whether there is a significant improvement when applying them.

Keywords: improvements, performance, strategies, autonomous learning.

Introducción

Una preocupación de muchos docentes en el nivel universitario (y en todos los niveles) ha sido reiterado en diferentes espacios en los últimos tiempos ya que el estudiante debe aprender de forma activa, comprometida y autónoma a lo largo de la vida, para lograr aprendizajes de calidad que contribuyan a nuestra mejor adaptación en contextos siempre cambiantes. Esto se ha reflejado en los estudios sobre autorregulación en el aprendizaje, que se han venido desarrollando en los últimos 30 años, lo que es un reflejo de dicha preocupación.

Una pregunta frecuente de muchos docentes comprometidos con su tarea de formadores de futuros profesionistas es, ¿qué actividades contribuyen a que los estudiantes sean autónomos en sus actividades de aprendizaje? ¿Cómo contribuir al desarrollo de esa habilidad? Estas preguntas pueden ser analizadas desde el concepto de autorregulación, sobre la que deben realizarse estudios tomando en consideración el contexto en el que se realicen dichos trabajos.

Si bien la preocupación y algunas propuestas han existido siempre, es a partir de la última década del siglo pasado cuando se ha registrado un crecimiento en el número de publicaciones, (Goetz, Nett, y Hall, 2013; Greene, 2018). En estudios recientes en el ámbito puramente académico en los que se destaca aspectos relacionados con el aprendizaje como la comprensión de textos (van de Pol, de Bruin, van Loon y van Gog, 2019); escritura (Palermo y Thomson, 2018); matemáticas (Callan y Cleary, 2019); ciencias (González, 2017); el éxito escolar en educación inicial (Perels y Dörr, 2019); el desarrollo de habilidades musicales (Varela, Abramis, y Upitis, 2014); el uso de tecnologías de la información en aula y la multitarea (Zhang, 2015); el bienestar en el ejercicio profesional docente (Mattern y Bauer, 2014).

El diseño y análisis de estrategias de trabajo autónomo es un aspecto fundamental para los estudiantes de cualquier licenciatura, en especial a quienes ingresan a ingeniería pesquera puesto que deben estar preparados para desempeñar actividades de manera individual y/o colectiva muy específica en el ámbito de la profesión. Con el objetivo de promover la autonomía y el desarrollo de habilidades efectivas de organización y gestión del tiempo, se puso en marcha un proyecto destinado a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería. En este trabajo, se presentarán los resultados obtenidos tras la implementación exitosa de este proyecto, destacando las mejoras significativas en el desempeño académico y las habilidades de trabajo autónomo de los estudiantes.

El aprendizaje autorregulado se lleva a cabo cuando el estudiante es capaz de gestionar los procesos cognitivos y emocionales que están involucrados en su aprendizaje, de forma deliberada. Esto es, el estudiante es capaz de seleccionar aquellas estrategias que le resultan beneficiosas en el momento de aprender, regulando sus emociones y desempeño para alcanzar sus metas.

Sumado a esto, no podría ser más cierto que “la capacidad de autorregulación del aprendizaje podría ser un predictor de éxito académico incluso mayor que la inteligencia” (Gómez et al., 2011).

Con base en los anterior se estableció como objetivo fomentar la autonomía y la responsabilidad en los estudiantes de ingeniería pesquera, para que sean capaces de tomar decisiones informadas y gestionar sus propias actividades de aprendizaje autónomo, es decir que los estudiantes se conviertan en aprendices autónomos y responsables de su propio desarrollo académico. Con lo que se planteó la pregunta de investigación: ¿Cómo impacta la implementación de estrategias de trabajo autónomo en el desarrollo de habilidades de autorregulación del aprendizaje y el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería pesquera de la universidad autónoma de Nayarit?

Marco Teórico

De las teorías que dan soporte a la autorregulación del aprendizaje el desarrollo del trabajo toma como referentes teóricos a Winifred Ford y a Barry J. Zimmerman (2002), quien ha realizado investigaciones significativas sobre la autorregulación del aprendizaje, particularmente en el contexto de la educación superior. Por su parte Ford (1992), ha efectuado trabajos sobre la autorregulación del aprendizaje, particularmente en el contexto de la educación superior. Cómo se puede observar los enfoques teóricos tomados como base se dan en el contexto de la educación superior, que es el campo en el que se desarrolló esta investigación.

Para llevar a cabo lo anterior se concibió la estrategia de: Planear, Monitorear y Valorar, lo que coincide con el trabajo de Vives – Varela, et. al. (2014). Con relación a Planear, se significa el planear metas del estudiante con la guía del docente; para Monitorear se realiza una supervisión de la comprensión de cómo se está realizando la tarea y en su caso re direccionar las estrategias que se plantearon; finalmente se debe Valorar la eficacia y la eficiencia de la actividad para verificar si el esfuerzo realizado por el estudiante corresponde al resultado.

Las variables independientes para la puesta en escena del trabajo son la implementación de estrategias de trabajo autónoma y la intervención educativa, referida a la intervención y enfoque utilizado para facilitar el desarrollo de habilidades de autorregulación del aprendizaje

Se establecen como variables dependientes del trabajo a las habilidades de autorregulación del aprendizaje y al rendimiento académico. La primera variable representa el grado en que los estudiantes de ingeniería pesquera son capaces de regular y controlar su propio proceso de aprendizaje de manera efectiva; mientras que, la segunda refleja el nivel de logro académico.

Metodología

Se utilizó una metodología mixta combinado que permitirá obtener una comprensión profunda de las experiencias y percepciones de los estudiantes, así como recopilar datos numéricos para analizar el impacto de las estrategias implementadas: incluye la revisión de la literatura existente sobre trabajo autónomo, autorregulación del aprendizaje y estrategias de mejora del rendimiento académico; diseño del proyecto con base en el contexto de la unidad académica; implementación del proyecto que incluye sesiones de instrucción, talleres, actividades prácticas, etc.; recopilación de datos de las entrevistas y otros instrumentos, pruebas estandarizadas; análisis de datos y su interpretación.

Se consideró que la Ingeniería Didáctica engloba la mayoría de las actividades descritas, por lo que se plantea como metodología base. Esta estuvo enmarcada bajo los momentos planteados por Michelle Artigue (1995) con la finalidad de poner en juego las diferentes estrategias planteadas. El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1. Primera fase: Análisis preliminares.

2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.

3. Tercera fase: Experimentación.

4. Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación

La población objeto del trabajo estuvo constituida por 20 estudiantes de ña licenciatura en ingeniería pesquera de la universidad autónoma de Nayarit, 10 de primer ingreso y 10 de otros grados. Con el propósito de ajustarse en la medida de los posible a la ingeniería didáctica se realizó en análisis de los datos obtenidos y así poder dar respuesta a la pregunta de investigación, lo que se realizó en la secuencia que se describe.

1. Aplicación y análisis del pretest para determinar el nivel de habilidades de autorregulación del aprendizaje y el rendimiento académico antes de la implementación del proyecto.
2. Implementación del proyecto que incluyó el diseño y el análisis de las estrategias de trabajo autónomo, se proporcionó a los estudiantes información, orientación y oportunidades de práctica para desarrollar y fortaleces sus habilidades de autorregulación del aprendizaje.
3. Análisis de los datos posteriori, esto es evaluar el impacto de las estrategias de trabajo autónomo en el desarrollo de las habilidades de autorregulación del aprendizaje y el rendimiento académico.
4. Comparación de resultados pretest y post test para identificar cualquier mejora o cambio significativo. Se busca evidencia de un aumento en la capacidad de los estudiantes para establecer metas claras, planificar su trabajo autónomo, monitorear su progreso y adaptar estrategias de manera efectiva.
5. Verificación de los objetivos, es decir evaluación del comparativo para en caso de que los resultados muestren un aumento significativo se concluya que se lograron los objetivos.

Para la recolección de la información del trabajo autónomo en los estudiantes de ingeniería pesquera se utilizó un cuestionario para medir de autorregulación del aprendizaje relacionado con la capacidad de establecer metas, planificar es estudio, monitorear su progreso, regular la motivación y evaluar su propio rendimiento, este cuestionario se aplicó antes y después de la implementación del proyecto. Además, se realizaron entrevistas tanto de manera individual como grupales con la finalidad de explorar temas como las fortalezas y debilidades percibidas, los desafíos encontrados, las estrategias utilizadas y los cambios que creen experimentaron.

Se plantearon las siguientes hipótesis para el trabajo

Hipótesis nula: No hay diferencia significativa en el nivel de autorregulación del aprendizaje de los estudiantes de ingeniería antes y después de la implementación de las estrategias de trabajo autónomo.

Hipótesis alternativa: Existe una diferencia significativa en el nivel de autorregulación del aprendizaje de los estudiantes de ingeniería antes y después de la implementación de las estrategias de trabajo autónomo, indicando un impacto positivo de las estrategias en el desarrollo de habilidades de autorregulación.

Resultados y Conclusiones

Para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada: ¿Cómo impacta la implementación de estrategias de trabajo autónomo en el desarrollo de habilidades de autorregulación del aprendizaje y el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería pesquera de la universidad autónoma de Nayarit? Se realiza el análisis de los resultados.

Los resultados obtenidos se presentan de manera resumida en la tabla No. 1, en la que se presentan los rubros considerados y evaluados tal como las estrategias identificadas, las metas establecidas y su logro, la planificación, el monitoreo y la adaptación de las estrategias.

Tabla No. 1. Rubros evaluados para determinar la autorregulación

	Resultados	
Rubros Evaluados	**Pretest**	**Postest (Pot test)**
Identificación de estrategias efectivas	4	7
Establecimiento de metas claras y realistas	5	8
Planificación adecuada de tiempo y recursos	4	6
Monitoreo y evaluación del progreso	5	7
Adaptación de estrategias	5	6

Como prueba estadística se consideró como adecuada con la naturaleza de los datos recolectados fue la t Student con la finalidad de poder dar respuesta a la pregunta de investigación establecida para el trabajo. Por ello se compararon las puntuaciones en los dos momentos: antes y después con ello se determina si hay diferencias estadísticamente significativas entre las dos mediciones y se evalúa el impacto de las estrategias establecidas.

A continuación, se presentan los análisis estadísticos del instrumento aplicado a alumnos de primer ingreso y estudiantes de semestres más avanzados. En las tablas 2 y 3 se presentan los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes, los números representan en cada caso el promedio de todos rubros evaluados.

Tabla No. 2. Comparación de los resultados pretest y post test
para cada estudiante de primer ingreso

Primer Ingreso			
Examen A priori		Examen A posteriori	
10		10	
1	40	1	71
2	61	2	83
3	42	3	69
4	52	4	74
5	54	5	64
6	60	6	74
7	59	7	60
8	55	8	63
9	61	9	72
10	60	10	72

Al observar los promedios del examen a priori con los del a posteriori se pudieran tener conclusiones, sin embargo y de acuerdo con lo establecido se realizó la prueba t student y se tiene que:

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales

	A Priori	*A Pos teriori*
Media	55,6	70,2
Varianza	39,8222222	43,9555556
Observaciones	10	10
Varianza agrupada	41,8888889	
Diferencia hipotética de las medias	0	

Grados de libertad	18
Estadístico t	-5,0441552
P(T<=t) una cola	4,2194E-05
Valor crítico de t (una cola)	1,73406361
P(T<=t) dos colas	8,4388E-05
Valor crítico de t (dos colas)	2,10092204

Como 0.05 > 8.4388E-05 y 0.05 la hipótesis nula se rechaza y se acepta la hipótesis alternativa

Tabla No. 3. Comparación de los resultados pretest y post test para cada estudiante grados avanzados

	Estudiantes de grados superiores		
Examen A priori		**Examen A posteriori**	
10		10	
1	62	1	72
2	64	2	89
3	59	3	66
4	68	4	71
5	60	5	69
6	58	6	73
7	61	7	70
8	63	8	71
9	67	9	80
10	64	10	78

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales

	A Priori	*A posteriori*
Media	62,6	73,9
Varianza	10,7111111	44,9888889
Observaciones	10	10
Varianza agrupada	27,85	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	18	
Estadístico t	-4,7879637	
P(T<=t) una cola	7,3608E-05	
Valor crítico de t (una cola)	1,73406361	
P(T<=t) dos colas	0,00014722	
Valor crítico de t (dos colas)	2,10092204	

Como 0.05 > 0.00014722 la hipótesis nula se rechaza y se acepta la hipótesis alternativa

Al analizar los datos y realizar una comparación entre el pretest y el post test, se puede proporcionar evidencia sólida para responder la pregunta de investigación y verificar que los objetivos del proyecto se lograron con éxito.

Lo anterior queda respaldado por la prueba t student, ya que los resultados en ambos casos concluyen que la media entre las dos pruebas (a priori y a posteriori) son distintas, esto es se acepta la hipótesis alternativa: *Existe una diferencia significativa en el nivel de autorregulación del aprendizaje de los estudiantes de ingeniería antes y después de la implementación de las estrategias de trabajo autónomo, indicando un impacto positivo de las estrategias en el desarrollo de habilidades de autorregulación*.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, & L. Moreno, Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (págs. 33-60). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Callan, G. L., & Cleary, T. J. (2019). Examining cyclical phase relations and predictive influences of self-regulated learning processes on mathematics task performance. Metacognition and Learning, (14), 43–63.

Ford, W. W. (1992). Improving student achievement through direct instruction in self-regulation. Education and Treatment of Children, 15(3), 221-242

Gómez, D., & Eugenia, M. (2011). Factores que influyen en el rendimiento académico del estudiante universitario. Tecnociencia Chihuahua, 2, 90-97.

González, C. (2017). Efectos de la enseñanza en la autorregulación del aprendizaje de conceptos científicos en estudiantes universitarios. SUMMA Psicológica UST, 14(2), 1–13. https://doi.org/10.18774/summa-vol14.num2-336

Goetz, T., Nett, U. E., & Hall, N. C. (2013). Self-Regulated Learning. In N. C. Hall & T. Goetz (Eds.), Emotion, Motivation, and Self-Regulation: A Handbook for Teachers (pp. 123–166). Bingley: Emerald Group.

Greene, J. A. (2018). Self-regulation in education. New York: Routledge.

Mattern, J., & Bauer, J. (2014). Does teachers' cognitive self-regulation increase their occupational well-being? The structure and role of self-regulation in the teaching context. Teaching and Teacher Education, 43, 58–68. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.05.004

Palermo, C., & Thomson, M. M. (2018). Teacher implementation of Self-Regulated Strategy Development with an automated writing evaluation system: Effects on the argumentative writing performance of middle school students. Contemporary Educational Psychology, 54(July), 255–270. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.07.002

Perels, F., & Dörr, L. (2019). Improving Metacognitive Abilities As An Important Prerequisite for Self-Regulated Learning in Preschool Children. Lnternational Electronic Journal of Elementary Education, 11(5), 449–459. https://doi.org/10.26822/iejee.2019553341

van de Pol, J., de Bruin, A. B. H., van Loon, M. H., & van Gog, T. (2019). Students' and teachers' monitoring and regulation of students' text comprehension: Effects of comprehension cue availability. Contemporary Educational Psychology, 56(February), 236–249. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.02.001

Varela, W., Abrami, P. C., & Upitis, R. (2014). Self-regulation and music learning: A systematic review. Psychology of Music, 44(1), 1–20. https://doi.org/10.1177/0305735614554639

Vives-Varela, T.; Durán-Cárdenas, C.; Varela-Ruíz, M.; Fortoul, T (2014). La autorregulación en el aprendizaje, la luz de un faro en el mar. Inv Ed Med 2014;3(9):34-39

Zhang, W. (2015). Learning variables, in-class laptop multitasking and academic performance: A path analysis. Computers & Education, 81, 82–88. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.09.012

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. Theory into Practice, 41(2), 64-70

Revista MICA.
Volumen _ No. _
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero – Junio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 81 - 88
Recibido: mayo 30 de 2023
Aprobado: junio 30 de 2023

Sólidos de Revolución: una forma de entender la integral
Solids of Revolution: a way of understanding the integral

Autores

Miguel Angel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
miguel.lopez@uan.edu.mx

Sólidos de Revolución: una forma de entender la integral
Solids of Revolution: a way of understanding the integral

Resumen

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución, se sigue generalmente el método del disco o el método del anillo. Ambos métodos se basan en la idea de aproximar el sólido de revolución mediante una serie de discos o anillos infinitesimales, cuyos volúmenes pueden ser calculados fácilmente. En esta investigación se sigue la aproximación por medio de discos, es decir se divide la región a rotar en delgadas franjas perpendiculares al eje de revolución. Cada franja se considera como un disco de radio determinado por la distancia entre la franja y el eje de revolución. El volumen de cada disco se calcula multiplicando el área del disco (πr^2) por el espesor de la franja o altura del disco (dx), y luego se integra para obtener el volumen total. En sí, se busca generar objetos tridimensionales obtenido al girar una región plana alrededor de un eje cartesiano.

Palabras clave: Cálculo Integral, Discos Sólidos, Eje de Revolución, Función, Calculo infinitesimal.

Abstract

To find the volume of a solid of revolution, the disk method or the ring method is generally followed. Both methods are based on the idea of approximating the solid of revolution by means of a series of infinitesimal disks or rings, whose volumes can be easily calculated. In this investigation, the approximation is followed by means of disks, that is, the region to be rotated is divided into thin strips perpendicular to the axis of revolution. Each fringe is considered as a disk of radius determined by the distance between the fringe and the axis of revolution. The volume of each disk is calculated by multiplying the area of the disk (πr^2) by the thickness of the fringe or height of the disk (dx), and then integrating to obtain the total volume. In itself, it seeks to generate three-dimensional objects obtained by rotating a flat region around a Cartesian axis.

Keywords: Roots, Integral Calculus, Solid Disks, Axis of Revolution, Function, Infinitesimal Calculus.

Introducción

El cálculo integral es una herramienta matemática que nos permite abordar problemas complejos relacionados con áreas, volúmenes y muchas otras aplicaciones. Entre las diversas técnicas utilizadas en el cálculo integral, los sólidos de revolución ocupan un lugar destacado. Estos sólidos se forman al girar una región plana alrededor de un eje y nos ofrecen un enfoque visualmente atractivo y conceptualmente interesante para comprender y calcular volúmenes en el contexto de la matemática, y de acuerdo a Sir Isaac Newton en dónde menciona: "La idea de los sólidos de revolución y su análisis mediante el cálculo integral es un ejemplo sublime de la belleza matemática que subyace en la naturaleza." Newton (1687), deja en claro que al general una función de dos dimensiones, se puede apreciar la creación de un sólido en tres dimensiones.

Otros matemáticos que se especializaron en temas relacionados con la geometría, especialmente cuando se trabaja en forma bidimensional, y se busca trasladar esas geometrías a una tercera dimensión, mencionan que un plano 2D, a través de un simple giro genera un plano 3D, como lo menciona René Descartes: "Los sólidos de revolución nos permiten ir más allá de la geometría plana y comprender cómo las figuras bidimensionales se transforman en objetos tridimensionales mediante un simple giro." Descartes (1637). Por otro lado, uno de los más grandes matemáticos de la historia Carl Friedrich Gauss, él se refiere a los sólidos de revolución como parte del mundo de la física y menciona que se relacionan entre ciertas disciplinas: "El estudio de los sólidos de revolución es esencial para comprender los fenómenos físicos que ocurren en torno a objetos que presentan simetría rotacional." Gauss (1827). En la actualidad se necesita dar soluciones a situaciones y problemas como de cálculo o diseño, debido a las exigencias que se da por la misma competencia profesional, es por eso que actualmente con la tecnología existen software de análisis y diseño, y parte de las operaciones booleanas matemáticas, son los sólidos de revolución, es por esto que el arquitecto y teórico de la arquitectura, urbanista, pintor, escultor y hombre de letras, Charles-Édouard Jeanneret- Gris, más conocido en la década de 1920 como Le Corbusier, menciona que: "La capacidad de calcular volúmenes mediante la técnica de los sólidos de revolución ha sido fundamental en el desarrollo de la arquitectura y el diseño de objetos tridimensionales." Le Corbusier (1954).

Justificación

La utilización de sólidos de revolución permite una representación precisa de objetos y estructuras complejas en un formato tridimensional. Esto es especialmente útil en campos como la arquitectura y la ingeniería, donde es necesario modelar y visualizar elementos como columnas, tuberías, engranajes y componentes mecánicos.

Según la investigación de Chauhan, A. (2018), la representación mediante sólidos de revolución ofrece una forma efectiva de visualizar y analizar las características geométricas y de movimiento de estos objetos, lo que facilita la toma de decisiones y la comunicación eficiente en el proceso de diseño y construcción. En cuanto a la aportación de los sólidos de revolución a la simplicidad de cálculos matemáticos y físicos, estos también simplifican los cálculos en el análisis de fenómenos complejos. Al transformar una figura bidimensional en un sólido de revolución, se pueden aplicar fórmulas y ecuaciones específicas para determinar propiedades como el volumen, el área de superficie, el centro de masa y momentos de inercia. En el estudio de Rada, G. (2019), se destaca que esta simplificación matemática es esencial en el análisis de estructuras rotacionales y vibraciones mecánicas, lo que permite ahorrar tiempo y recursos en el proceso de diseño y análisis. Para las aplicaciones en el ámbito físico y científico: Los sólidos de revolución encuentran aplicaciones significativas en el ámbito físico y científico. Por ejemplo, en la física de fluidos, se pueden utilizar para modelar objetos como cilindros y esferas en movimiento dentro de un fluido, lo que ayuda a comprender los fenómenos de arrastre y resistencia. Según el artículo de investigadores Choudhury, N. R. y Datta, P. K. (2019), los sólidos de revolución también se aplican en campos como la óptica, la acústica y la química, donde su uso permite simplificar los cálculos y facilitar el análisis de los fenómenos físicos involucrados.

Entonces los sólidos de revolución nos permiten el cálculo de volúmenes, áreas de superficies y momentos de inercia, y se utilizan en diversas áreas de la física y la ingeniería para analizar y comprender objetos tridimensionales de forma eficiente.

Soporte Teórico

¿Qué es un sólido de revolución?, Por supuesto que primero, es necesario comprender qué es un sólido de revolución, un sólido de revolución se entiende que es una figura tridimensional, creada a partir de una función que se encuentra en el plano cartesiano de ejes coordenados “x” y “y”, cómo se muestra en la figura 1 (Recuperado de https://periodico365.com/el-plano-cartesiano/).

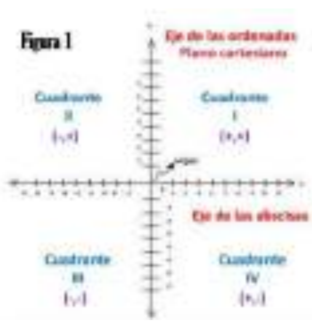


Figura 1: plano cartesiano de ejes coordenados en 2D

Ahora según Stewart (2015), un sólido de revolución se forma al girar una región R alrededor de un eje fijo para generar una figura tridimensional. Este eje puede ser cualquier línea recta, pero con frecuencia se utiliza el eje x o el eje y. Algunos ejemplos comunes de sólidos de revolución incluyen cilindros, conos y esferas.

Uno de los principales conceptos asociados a los sólidos de revolución es el de la integral definida. Según Larson y Edwards (2013), la integral definida se utiliza para calcular el volumen de un sólido de revolución. Para ello, se debe determinar una función que describa la región R, establecer los límites de integración y aplicar la fórmula correspondiente, cómo se muestra en la figura 2 (Recuperado de https://www.redalyc.org/journal/6079/607968030005/html/).

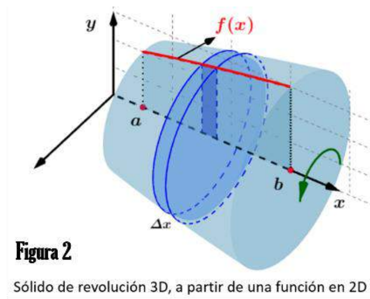


Figura 2: volumen de un sólido de revolución en 3D

Para calcular el volumen del disco del sólido de revolución, se necesita el área de un círculo cuyo radio será la función que representa la trayectoria, y se multiplica por la altura que representa la diferencial a integrar; Por lo tanto, el resultado de la integral definida proporciona el volumen exacto del sólido de revolución, cómo se muestra en la figura 3 (Fuente, autor de esta investigación).

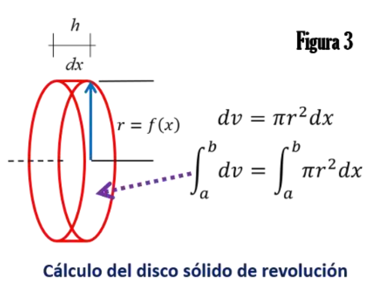


Figura 3: volumen de un disco sólido para revolución en 3D

Además, como otra aplicación, los sólidos de revolución también se pueden utilizar para calcular el área de una superficie curva, aunque este cálculo tiene su fórmula de apoyo especifica que en esta investigación no se incluye. Según Anton, Bivens y Davis (2014), se emplean integrales definidas para determinar el área de una superficie generada al girar una curva alrededor de un eje. Este proceso se conoce como la fórmula del área de superficie de un sólido de revolución y es una aplicación importante de la integral definida en el contexto de los sólidos de revolución.

Metodología

Los sólidos se obtienen al girar una región acotada alrededor de un eje, generando una figura tridimensional. Por lo tanto, la metodología para calcular volúmenes de sólidos de revolución utilizando la técnica del cálculo integral, para este ejercido en particular sería:

- Definir la región: Identificar la región en el plano “x”, “y” que se va a rotar alrededor de un eje para formar el sólido de revolución. Es importante delimitar correctamente la región y establecer los límites de integración adecuados, esto se logra igualando las ecuaciones delimitantes y posteriormente calculando sus raíces de intersección.

- Elegir el eje de revolución: Seleccionar el eje de revolución alrededor del cual se girará la región para formar el sólido (puede ser por el eje “x” o “y”). Esto determinará la variable independiente en la expresión integral.

- Expresar la función en términos de la variable independiente: Representar la forma de la región a través de una función en términos de la variable independiente, esto depende del eje en revolución, y es necesario que “x” o “y” estén despejadas, según el caso. Esto permitirá establecer los límites de integración y la función integrando.

- Determinar los límites de integración: Establecer los límites de integración para la variable independiente en función de la región a rotar. Estos límites se basan en los puntos de intersección de la región con el eje de revolución.

- Calcular la integral: Utilizar la fórmula del cálculo integral para determinar el volumen del sólido de revolución. La integral debe ser evaluada en los límites de integración obtenidos en el paso anterior.

- Simplificar y evaluar: Simplificar la expresión integral obtenida, aplicando técnicas de simplificación algebraica si es necesario. Finalmente, evaluar numéricamente la integral para obtener el volumen del sólido de revolución, este resultado quedará en unidades de volumen ya sea en el Sistema Métrico Decimal o el Sistema Inglés.

Objetivo

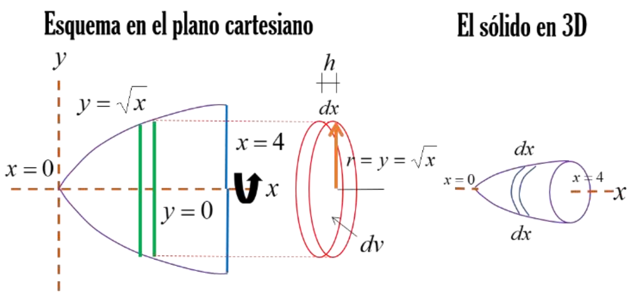
El ejercicio de un cálculo de sólido de revolución, mediante el uso de un disco sólido.

Hipótesis

El ejercicio de un sólido de revolución mediante discos y su técnica de integración adecuada, es un procedimiento entendible y accesible.

Solución a un ejercicio

En el siguiente ejercicio nos piden hallar el volumen del sólido que resulta de girar, alrededor del eje "x", la región limitada por la curva y=√(x) y las rectas x=0, y=0 y x=4. Mediante discos resolverlo.



Entonces siguiendo los pasos para el cálculo del sólido de revolución, se tiene los límites (a=0 y b=4), el disco y la región correspondiente de acuerdo al eje que se pide.

Calculando el volumen:

$$dv = \pi r^2 h$$

$$dv = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$dv = \pi x dx$$

$$\int dv = \int_0^4 \pi x dx$$

$$v = \pi\int_0^4 x dx = \pi\left|\frac{x^{1+1}}{1+1}\right|_0^4 = \pi\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \pi\left|\frac{(4)^2}{2}\right| - \pi\left|\frac{(0)^2}{2}\right| = \pi\left|\frac{16}{2}\right| = \boxed{8\pi \text{ u}^3}$$

El volumen resultante de este ejercicio es de 25.1327 unidades cubicas.

Conclusiones

En conclusión, es posible calcular el volumen de un sólido generado por la rotación de una curva alrededor de un eje. Esta aplicación de la integral nos permite obtener resultados precisos y exactos, lo que resulta especialmente útil en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Entonces los sólidos de revolución en el cálculo integral son esenciales para comprensión y análisis de objetos tridimensionales de forma precisa. Además, las técnicas de integración nos brindan herramientas poderosas para calcular volúmenes, áreas de superficie y propiedades relacionadas, lo que resulta de gran utilidad en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Entonces el concepto de función representada en una segunda dimensión y que, al girar sobre un eje cartesiano, se puede entender cómo se genera un sólido tridimensional, con el uso de técnicas del cálculo infinitesimal desarrolladas en la época moderna por Sir Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

Bibliografía

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2014). Calculus. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. Limusa

Chauhan, A. (2018). Role of solid of revolution in engineering graphics: A review. International Journal of Current Engineering and Scientific Research, 5(1), 139-143.

Choudhury, N. R., & Datta, P. K. (2019). Solid of Revolution in Science. American Journal of Physics and Applications, 7(3), 66-71.

Gauss, C. F. (1827). Disquisitiones Arithmeticae [Investigations in Arithmetic]. Göttingen: Sumptibus Weberianis.

Descartes, R. (1637). Discours de la méthode [Discourse on the Method]. Paris: Ian Maire

Larson, R., & Edwards, B. (2013). Cálculo y geometría analítica (Novena ed.). McGraw-Hill.

Le Corbusier (1954). Le Modulor: Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique.

Newton, I. (1687). Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica [Mathematical Principles of Natural Philosophy]. Londini [London]: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater.

Rada, G. (2019). Solid of revolution – geometrical models and applications. Materials Science Forum, 942, 551-558.

Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Boston, MA: Cengage Learning.

Revista MICA.
Volumen _ No. _
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero – Junio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 72 - 80
Recibido: mayo 29 de 2023
Aprobado: junio 25 de 2023

La fórmula de Cardano: una propuesta para su implementación
The Cardano formula: a proposal for its implementation

Autores

Miguel Angel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
miguel.lopez@uan.edu.mx

Deisy Nereyda Velázquez Salazar
Universidad de Baja California
Nueva Galería, Campus Tepic
Eyde1505@gmail.com

La fórmula de Cardano: una propuesta para su implementación
The Cardano formula: a proposal for its implementation

Resumen

Esta investigación se presenta la fórmula de Cardano qué es una herramienta utilizada para encontrar las soluciones de una ecuación de tercer grado (también conocida como una ecuación cúbica), y se aplica a la solución de un ejercicio práctico. Fue desarrollada por el matemático renacentista italiano Gerolamo Cardano en el siglo XVI. El primer paso en la aplicación de la fórmula de Cardano es reducir la ecuación cúbica a una forma especial llamada forma canónica, donde se elimina el término cuadrático dividiendo toda la ecuación por el coeficiente principal "a". A continuación, se introduce una variable auxiliar llamada "t". Ahora viene el paso crucial de la fórmula de Cardano. Se introducen dos variables auxiliares, "p" y "q". Finalmente, utilizando estas variables auxiliares, se obtienen las soluciones de la ecuación cúbica original.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Palabras clave: Raíces, Solución Cubica, Numero Real, Función Polinomial, Tales de Mileto, Triangulo Rectángulo.

Abstract

This research presents the Cardano formula which is a tool used to find the solutions of a quadratic equation (also known as a cubic equation), and it is applied to the solution of a practical exercise. It was developed by the Italian Renaissance mathematician Gerolamo Cardano in the 16th century. The first step in applying Cardano's formula is to reduce the cubic equation to a special form called the canonical form, where the quadratic term is eliminated by dividing the entire equation by the leading coefficient "a". Next, an auxiliary variable called "t" is introduced. Now comes the crucial step of the Cardano formula. Two auxiliary variables are introduced, "p" and "q". Finally, using these auxiliary variables, the solutions of the original cubic equation are obtained.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Keywords: Roots, Cubic Solution, Real Number, Polynomial Function, Thales of Miletus, Right Triangle.

Introducción

En matemáticas, la fórmula cúbica de Cardano, también conocida como la fórmula de Cardano-Tartaglia, es una destacada contribución matemática que revolucionó el estudio de las ecuaciones cúbicas. Desarrollada por el matemático italiano del siglo XVI, Gerolamo Cardano, por lo tanto, la fórmula proporciona una solución algebraica para ecuaciones cúbicas generales. Desde hace mucho tiempo, ha sido considerada una obra maestra del pensamiento matemático y ha influido en muchas generaciones. En esta investigación, se explora la utilidad de la fórmula cúbica de Cardano, su aplicación en un ejercicio histórico.

Para conocer la importancia de la ecuación cúbica, en el campo matemático, se cita a Cardano, en su obra "Ars Magna" (1545), expresa: "La resolución de ecuaciones cúbicas es un desafío que ha perseguido a los matemáticos durante siglos. Mi fórmula ofrece una solución general y abre nuevas puertas para la exploración de este campo" (Cardano, 1545), esto se refiere a que en otros tiempos no era tan sencillo calcular ejercicios con ecuaciones de tercer grado. Ahora una cosa es el uso de la fórmula para las ecuaciones cúbicas, pero otra es su comprensión, por eso según Tartaglia, otro matemático italiano contemporáneo de Cardano, en su correspondencia con él en 1539: "Descubrir esta fórmula fue un logro trascendental en mi carrera. Me alegra haber contribuido a la comprensión de las ecuaciones cúbicas" (Tartaglia, 1539), es decir ciertos matemáticos se han preocupado por dar a conocer esta fórmula de una manera que se pueda entender, debido a su complejidad.

Algunos ejercicios que existen, pueden ser un poco difíciles para su solución, pero hay científicos como Descartes que mencionan la alternativa de la solución por medio de la fórmula de Cardano, como se encuentra en su obra "La Géométrie" (1637), menciona: "La fórmula de Cardano-Tartaglia demuestra el poder del álgebra y su capacidad para resolver problemas aparentemente intratables. Es un hito en la historia de las matemáticas" (Descartes, 1637, p. 17). Unas de las menciones de uno de los grandes matemáticos de la historia, como Carl Friedrich Gauss, que es uno de los más influyentes de todos los tiempos, escribió en su diario en 1816: "La fórmula de Cardano representa una de las contribuciones más significativas en el campo de las ecuaciones cúbicas y ha sentado las bases para futuros avances en este campo" (Gauss, 1816, p. 18), lo cual nos muestra el gran avance en el descubrimiento de esta solución a una ecuación cúbica. Otra visión diferente es la de D. E. Smith, en su libro "History of Mathematics" (1925), afirma: "La fórmula cúbica de Cardano marcó un punto de inflexión en la historia de las matemáticas. Su ingeniosa solución abrió el camino para el desarrollo de técnicas algebraicas más sofisticadas" (Smith, 1925, p. 28). Lo cual el autor nos hace ver, el cambio en la forma de ver una solución a un ejercicio que contenga una ecuación de tercer grado.

Justificación

Como ya se conoce la fórmula cúbica de Cardano es una herramienta matemática invaluable que permite resolver ecuaciones cúbicas de la forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. A pesar de que su descubrimiento se remonta al siglo XVI, su relevancia perdura hasta nuestros días debido a su utilidad en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería. Aunque la solución analítica de la ecuación cubica, suele ser compleja en la práctica para resolver ejercicios, según Brown menciona la importancia del uso de esta herramienta: "La fórmula cúbica de Cardano es un recurso indispensable para resolver problemas de ingeniería estructural. En la determinación de las raíces de ecuaciones cúbicas, esta fórmula proporciona una solución exacta que facilita el diseño y análisis de estructuras complejas" (Brown, 2018, p. 126). Es muy común utilizar la formula general de las cuadráticas, debido a su fama y cierto nivel de simplicidad, pero es importante dar a conocer que la formula general de tercer grado tiene su lugar en el mundo analítico del algebra, dar a conocer el campo de aplicación diverso puede cambiar la visión de este tipo de solución de tercer grado, como lo dice: "La fórmula cúbica de Cardano es una de las herramientas fundamentales en el álgebra y el análisis matemático. Su aplicación se extiende a campos como la física, la ingeniería y la economía, donde el estudio de ecuaciones cúbicas es esencial para resolver problemas prácticos" (Smith, 2010, p. 52).

Aunque existe otras aplicaciones variadas para la solución de raíces cubicas, ya sea en el campo de las matemáticas, física, economía, etc., lo importante es desarrollar y fortalecer el pensamiento matemático en los estudiantes, que a su vez esas habilidades serán importantes en la vida profesional de estos, como lo menciona el autor: "A través del estudio de la fórmula cúbica de Cardano, los estudiantes pueden adquirir habilidades analíticas y de pensamiento crítico, además de comprender mejor los conceptos fundamentales de las ecuaciones algebraicas" (Brown, 2018, p.

205). Es por esto la importancia el conocer que resolver un ejercicio de tercer grado, mediante está formula no será la forma más sencilla, pero si tiene un valor incalculable desde el punto de vista histórico, por lo tanto ese es el reto, mostrar delo que puede hacer esta fórmula, como lo dice el autor: "Aunque no es el método más eficiente para resolver ecuaciones cúbicas en la actualidad, la fórmula cúbica de Cardano tiene un valor educativo incalculable al enseñar a los estudiantes sobre la historia de las matemáticas y los desafíos a los que se enfrentaron los matemáticos pioneros" (Davis, 2015, p. 159).

Soporte Teórico

La ecuación de tercer grado conocida comúnmente como “La Cúbica”, o como la fórmula de Cardano, para las raíces cúbicas, es una herramienta matemática desarrollada por el matemático renacentista italiano Gerolamo Cardano en el siglo XVI. Esta fórmula permite encontrar las raíces de una ecuación cúbica de la forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dónde: a, b, c y d son coeficientes reales o complejos y “x” es la variable desconocida o de tipo independiente. La fórmula de Cardano se basa en el uso de números complejos y tiene tres etapas principales: reducción a la forma canónica, resolución de la ecuación reducida y reconstrucción de las raíces de la ecuación original. A continuación, se presentan tres etapas clave del marco teórico de la fórmula de Cardano:

1. Reducción a la forma canónica: La primera etapa consiste en reducir la ecuación cúbica a su forma canónica, eliminando el término cuadrático. Esto se logra mediante una sustitución adecuada. Al realizar la sustitución $x = y - \left(\frac{b}{3a}\right)$, la ecuación cúbica se convierte en una ecuación de la forma $y^3 + py + q = 0$, en dónde “p” y “q” son nuevos coeficientes.

2. Resolución de la ecuación reducida: Una vez que la ecuación se ha reducido a la forma canónica, se aplica la fórmula de Cardano para encontrar una de las raíces reales o complejas de la ecuación reducida. La fórmula de Cardano se expresa como:

$$y = \left(\frac{q}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} - \frac{q}{2}} - \frac{p}{3} - \frac{\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}$$

Esta fórmula permite calcular el valor de “y”, que es una de las raíces de la ecuación reducida.

3. Reconstrucción de las raíces de la ecuación original: Una vez obtenida la raíz y de la ecuación reducida, se utiliza una serie de transformaciones algebraicas para reconstruir las tres raíces de la ecuación original. Estas transformaciones se basan en las propiedades de los números complejos y permiten obtener las raíces reales o complejas de la ecuación cúbica original.

Metodología

En esta investigación se lleva a cabo la solución ejercicio planteado en el siglo XIII, en el cual resulta un planteamiento de una ecuación de grado tres, que es un polinomio de grado máximo tres. Por lo tanto, esta fórmula se aplica como una solución viable y de fácil uso. La ecuación general de las cubicas demostrará que puede dar solución a este ejercicio en particular, y además se muestra su desarrollo completo en operaciones de números reales, para llegar a la respuesta.

En la aplicación de la formula general de las cubicas es importante, tener mucho cuidado en el empleo de las operaciones con los números reales, respetando sus signos y sus operadores, también es necesario de usar herramientas matemáticas con el Teorema de Tales de Mileto y el Teorema de Pitágoras, así como tener en cuenta con claridad el conocimiento de las funciones trigonométricas.

Objetivo

Calcular un ejercicio práctico, mediante el uso de la fórmula de Cardano, para ecuaciones de tercer grado.

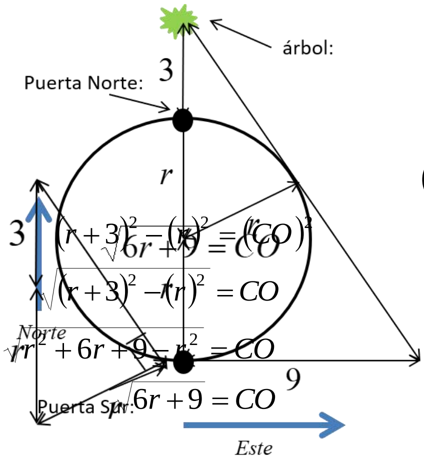
Hipótesis

Al calcular un ejercicio con la fórmula general de tercer grado, es un procedimiento entendible y accesible.

Solución a un ejercicio

En el siguiente ejercicio El problema siguiente, el cuál fue planteado en el siglo XIII por el matemático Chino Qin Jinshao (Imagen recuperada de https://www.biografiasyvidas.com/biografia/q/qin_jiushao.htm), (Qin Jiushao o Ts'in Kieu-shao; Sichuan, hacia 1202 - Meixian, hacia 1261) Matemático chino. Debe su fama a un importante libro: el Tratado de matemáticas en nueve capítulos (1247).

Este ejercicio dice lo siguiente: Una ciudad está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puerta norte y caminando 3 li hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar 9 li hacia el este para ver el mismo árbol. Calcular el diámetro de la ciudad.



Analizando el triangulo rectangulo de la parte superior, de esta manera se calcula el cateto opuesto (CO), con el apoyo del teorema de Pitágoras:

$$(r+3)^2=(r)^2+(CO)^2$$

$$(r+3)^2-(r)^2=(CO)^2$$

$$\sqrt{(r+3)^2-(r)^2}=CO$$

$$\sqrt{r^2+6r+9-r^2}=CO$$

$$\sqrt{6r+9}=CO$$

Los dos triángulos son semejantes por lo tanto poseen la misma pendiente, y aplicando el Teorema de Tales de Mileto:

$$\frac{2r+3}{9}=\frac{\sqrt{6r+9}}{r}$$

$$(2r+3)r=9\sqrt{6r+9}$$

$$[(2r+3)r]^2=[9\sqrt{6r+9}]^2$$

$$(2r+3)^2r^2=81(6r+9)$$

$$(2r+3)^2r^2=(81)(3)(2r+3)$$

$$(2r+3)^2r^2=243(2r+3)$$

$$\frac{(2r+3)^2r^2}{(2r+3)}=243$$

$$(2r+3)r^2=243$$

$$2r^3+3r^2-243=0$$

$$\frac{2r^3+3r^2-243}{2}=\frac{0}{2}$$

En una función de tercer grado se conoce que su forma general es:

$$r^3+\frac{3}{2}r^2-\frac{243}{2}=0$$

Esta es una ecuación de tercer grado y se resuelve mediante la fórmula de Cardano:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

Donde:

$$p=\frac{3b-a^2}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Calculando "r" mediante Cardano:

$$a = \frac{3}{2}; b = 0; c = -\frac{243}{2}$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3} = \frac{3(0) - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} = \frac{-\frac{9}{4}}{3} = -\frac{9}{12} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)(0) + 27\left(-\frac{243}{2}\right)}{27} = \frac{2\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{6561}{2}}{27} = \frac{\frac{54}{8} - \frac{6561}{2}}{27} = \frac{\frac{54 - 26244}{8}}{27}$$

$$= \frac{\frac{-26190}{8}}{27} = \boxed{-\frac{26190}{216}}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-\frac{26190}{216}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{3}{4}}{3}\right)^3 = \frac{\frac{685916100}{46656}}{4} + \left(\frac{-\frac{27}{64}}{27}\right) = \frac{685916100}{186624} - \frac{27}{(27)(64)} = \frac{685916100}{186624} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{43898630400 - 186624}{11943936} = \frac{43898443776}{11943936} = \boxed{\frac{29403}{8}}$$

Calculando "r" si "x=r"

$$x = r = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3} = \sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{26190}{216}\right)}{2} + \sqrt{\frac{29403}{8}}} + \sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{26190}{216}\right)}{2} - \sqrt{\frac{29403}{8}}} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{26190}{432} + \sqrt{\frac{29403}{8}}} + \sqrt[3]{\frac{26190}{432} - \sqrt{\frac{29403}{8}}} - \frac{3}{6} = \sqrt[3]{60.625 + \sqrt{3675.375}} + \sqrt[3]{60.625 - \sqrt{3675.375}} - \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt[3]{60.625 + 60.6248} + \sqrt[3]{60.625 - 60.6248} - 0.5 = \sqrt[3]{121.2498} + \sqrt[3]{0.00012} - 0.5$$

$$= 4.949488775 + 0.058480354 - 0.5 = \boxed{4.507969129\ldots}$$

Entonces el radio de la ciudad es de 4.5 li y su diámetro es de 9 li.

En la actualidad un "Li" es una unidad de longitud tradicional china y se ha estandarizado en 500 metros del Sistema Internacional de Unidades, aunque históricamente su valor osciló considerablemente entre distancias algo menores y mayores según los periodos. Entonces según el resultado del ejercicio el radio de la cuidad es de 4.5 Li, lo cual equivale a 2,250 metros, o 9 Li de diámetro que son 4,500 metros.

Conclusiones

Con este ejemplo, la fórmula de Cardano se puede decir que es una poderosa herramienta para resolver ecuaciones cúbicas. A través de su uso, se pueden encontrar soluciones exactas, incluso en casos en los que la factorización o métodos numéricos no son viables. La fórmula, aunque compleja y extensa, nos brinda una guía paso a paso para encontrar las raíces de la ecuación, lo cual es de gran utilidad en diversos campos de la matemática y la física. Sin embargo, también es importante destacar que la fórmula de Cardano tiene sus límites. No todas las ecuaciones cúbicas pueden resolverse mediante esta fórmula. Además, la fórmula puede conducir a resultados complejos y difíciles de interpretar en ciertos casos.

Bibliografía

Brown, A. (2018). Mathematical Methods for Engineers. Springer.

Cardano, G. (1545). Ars Magna.

Davis, J. (2015). Mathematics: A Practical Odyssey. Cengage Learning.

Descartes, R. (1637). La Géométrie.

Gauss, C. F. (1801). Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig: Fleischer.

Smith, D. E. (1925). History of Mathematics.

Smith, P. (2010). Mathematical Concepts and Applications. McGraw-Hill Education.

Tartaglia, N. (1539). Correspondencia personal.

DRJI

LatinREV

Revista MICA ISSN:2594-1933