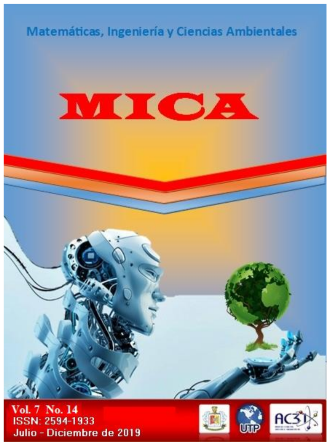

Revista MICA.
Volumen 7 No. 14.
ISSN: 2594-1933
Periodo: Julio - Diciembre de 2024
Tepic, Nayarit. México
Pp. 43 - 57
Recibido: septiembre 20 de 2024
Aprobado: noviembre 23 de 2024

La navegación y las matemáticas: laso indisoluble. Parte II

Navigation and mathematics: an inseparable bond. Part II

José Trinidad Ulloa Ibarra
Universidad Autónoma de Nayarit
jtulloa@uan.edu.mx
https://orcid.org/0000-0002-6382-7588

Bárbara Nayar Olvera Carballo
UA Derecho UAN
barbara.olvera@uan.edu.mx
https://orcid.org/0009-0001-3773-7570

María Inés Ortega Arcega
UACBI UAN
maria.arcega@uan.edu.mx
https:// orcid.org/0000-0002-1058-8106

Ana Luisa Estrada Esquivel
UACBI UAN
ana.estrada@uan.edu.mx
https://orcid.org/0000-0002-2425-035X

La navegación y las matemáticas: laso indisoluble. Parte II

Navigation and mathematics: an inseparable bond. Part II

Resumen

La navegación marítima ha evolucionado significativamente desde los tiempos de Cristóbal Colón, quien utilizó herramientas rudimentarias y principios matemáticos básicos para trazar su ruta hacia el Nuevo Mundo. En contraste, la navegación moderna se basa en tecnologías avanzadas y cálculos precisos. Las fórmulas de Napier son esenciales para calcular distancias y ángulos, facilitando la triangulación en mar abierto. La Ley de Cosenos permite determinar la distancia entre dos puntos en la esfera terrestre, crucial para la navegación global. Además, la corrección por curvatura terrestre es fundamental para ajustar las mediciones en largas distancias, asegurando la precisión en la navegación actual

Palabras clave: matemáticas, navegación, napier, ley de cosenos.

Abstract

Maritime navigation has evolved significantly since the time of Christopher Columbus, who used rudimentary tools and basic mathematical principles to chart his route to the New World. In contrast, modern navigation relies on advanced technologies and precise calculations. Napier's formulas are essential for calculating distances and angles, facilitating triangulation on the open sea. The Law of Cosines allows the distance between two points on the Earth's sphere to be determined, crucial for global navigation. In addition, correction for Earth's curvature is essential for adjusting measurements over long distances, ensuring accuracy in today's navigation.

Keywords: mathematics, navigation, napier, law of cosines

Introducción

La conexión entre la navegación y las matemáticas es muy importante y ha sido durante mucho tiempo un área de interés para educadores e ingenieros. Las matemáticas proporcionan herramientas esenciales para el diseño, la integración y la evaluación de sistemas de navegación, así como para la formación de futuros pilotos y observadores.

La enseñanza de la navegación suele ser responsabilidad de los profesionistas del área con conocimientos de matemáticas, quienes deben adaptar los conceptos matemáticos básicos al entorno de navegación. Aunque los conceptos matemáticos requeridos no son complejos, sí requieren conocimiento de terminología técnica exclusiva de la navegación.

Las matemáticas aplicadas son esenciales en el diseño y la integración de sistemas de navegación. Esto incluye el uso de cinemática, ecuaciones que describen los sistemas de navegación y sus modelos de error, así como el filtrado de Kalman para mejorar la precisión y eficiencia de estos sistemas. Uno de los principales desafíos es la adaptación de conceptos matemáticos conocidos a un contexto de navegación, lo que implica aprender y utilizar terminología técnica específica. En la aplicación práctica, es crucial entender y manejar los modelos de error en los sistemas de navegación, así como aplicar técnicas avanzadas como el filtrado de Kalman para optimizar el rendimiento del sistema.

Los faros han desempeñado un papel vital en la navegación marítima a lo largo de la historia. Estas impresionantes estructuras no solo han guiado a los barcos de manera segura en el vasto océano, sino que también han servido como símbolos de esperanza y seguridad para los marineros. La historia y evolución de los faros es fascinante y se remonta a miles de años atrás, marcando hitos importantes en el desarrollo de la tecnología y la seguridad marítima.

Los primeros faros conocidos se remontan a la antigua Grecia y Roma. Estos faros tempranos eran básicos en su diseño, utilizando hogueras o antorchas para emitir señales luminosas a los marineros en búsqueda de guía. Uno de los ejemplos más famosos de estos faros antiguos es el Faro de Alejandría (Figura No. 1), construido en el siglo III a.C., que se considera una de las maravillas del mundo antiguo. Este faro majestuoso alcanzaba una altura de más de 100 metros y se dice que su luz podía ser vista a más de 50 kilómetros de distancia.

Figura No. 1. Faro de Alejandría

La navegación, desde los tiempos de Cristóbal Colón hasta nuestros días, ha sido una disciplina intrínsecamente ligada a las matemáticas, y en particular, a la trigonometría esférica. Esta rama de las matemáticas se ocupa del estudio de los triángulos sobre la superficie de una esfera, lo que resulta fundamental para realizar cálculos precisos en un planeta con forma geoide como la Tierra.

Fig. No. 2. Los cuatro viajes de Colón a América

Revisión bibliográfica

El origen de la navegación debe buscarse en la necesidad que los primeros hombres al esparcirse por la tierra tuvieron de atravesar los ríos que les impedían su marcha: en cuyo caso debieron fijar su reflexión en ver flotar sobre las aguas algunos cuerpos livianos y los troncos de los árboles desarraigados y arrebatados por la impetuosidad de los torrentes a las madres o cauces de los mismos ríos: y de aquí, presentárseles naturalmente los medios de vencer aquellos obstáculos con maderos, tablones o corchos con que formaron las primeras balsas, sin que para una invención tan sencilla y natural hayamos de recurrir al Príncipe de Eritra como lo hace Plinio, ni a buscarla entre los lidios como opina San Isidoro (Fernández, 2003).

Los mapas y sobre todo las cartas marinas anteriores al siglo XIX son considerados hoy día como objetos de arte, además de los útiles instrumentos que fueron en el pasado. El desarrollo de la navegación oceánica a comienzo del siglo XV, con la exploración primero de la costa occidental de África y luego el Caribe y la costa oriental de América, lleva a una modificación de las cartas marinas debido a una nueva forma o arte de navegar. Sin embargo, las artes y cartas antiguas coexistieron con las nuevas hasta bien entrada la época moderna. Los problemas planteados por los cartógrafos requerían de una nueva matemática basada en la trigonometría plana y esférica y en el cálculo diferencial. Este último se desarrollará a lo largo de la última mitad del siglo XVII y la invención de los logaritmos a comienzos de dicho siglo, facilitará los cálculos de los cartógrafos y navegantes, (García, 2009).

Comparativa: Colón vs. Navegación Moderna

Aspecto	Cristóbal Colón	Navegación Moderna
Herramientas	Astrolabio, sextante, cartas náuticas	GPS, computadoras, software especializado
Precisión	Limitada por la precisión de los instrumentos y los cálculos manuales	Muy alta gracias a la tecnología satelital
Cálculos	Realizados a mano, utilizando tablas trigonométricas	Automatizados por computadoras
Conocimiento teórico	Basado en los conocimientos de la época, con una comprensión limitada de la forma de la Tierra	Fundamentado en una sólida base teórica de la trigonometría esférica y la geodesia

La habilidad de Colón como navegante: una mirada más allá del descubrimiento. La pregunta sobre si Cristóbal Colón era un buen navegante es más compleja de lo que parece a primera vista. Su logro de cruzar el Atlántico y "descubrir" América para Europa es indiscutible, pero esto no significa automáticamente que fuera un marinero excepcional en todos los sentidos.

La trigonometría esférica ha sido y sigue siendo una herramienta esencial para la navegación. Desde los tiempos de Cristóbal Colón hasta nuestros días, los marinos y los navegantes han utilizado los principios de esta rama de las matemáticas para determinar su posición, trazar rutas y explorar el mundo (Varela, 1984). Aunque la tecnología ha avanzado significativamente, la comprensión de los conceptos básicos de la trigonometría esférica sigue siendo fundamental para cualquier persona que desee navegar de manera segura y eficiente.

Las fórmulas de Napier son un conjunto de relaciones trigonométricas que permiten resolver triángulos esféricos. Estas fórmulas, junto con la ley de los cosenos esféricos, son la base para una gran cantidad de cálculos náuticos. Por ejemplo, se utilizan para determinar la distancia entre dos puntos en la superficie terrestre, calcular el rumbo a seguir para alcanzar un destino o determinar la posición de un barco en alta mar.

La ley de los cosenos esféricos es una generalización del teorema de Pitágoras para triángulos esféricos. Esta ley establece una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico, lo que permite resolver una amplia variedad de problemas de navegación.

La Corrección por Curvatura Terrestre: Navegando en un Planeta Curvo. La Tierra no es plana, sino que tiene una forma aproximadamente esférica. Esta curvatura hace que las distancias y los rumbos se vean afectados, especialmente en largas travesías. La corrección por curvatura terrestre es un conjunto de cálculos que permiten ajustar las mediciones y los cálculos para tener en cuenta la forma de la Tierra.

Metodología

C. Fórmulas de Napier

Las fórmulas de Napier son una herramienta muy útil en trigonometría esférica. Vamos a describir paso a paso cómo un piloto podría usar estas fórmulas para calcular la distancia entre dos aeropuertos. Para este ejemplo, usaremos las fórmulas de Napier para los triángulos esféricos rectos.

Supongamos que queremos calcular la distancia entre el Aeropuerto A: Latitud 40°N, Longitud 75°W y el Aeropuerto B: Latitud 50°N, Longitud 30°W

Paso 1: Crear un triángulo esférico recto

Figura No. 3. Triángulo esférico recto

El triángulo esférico recto es una herramienta matemática poderosa que simplifica significativamente los cálculos en la superficie esférica, siendo crucial en navegación, astronomía y geodesia. Su comprensión y aplicación son fundamentales para cualquier persona involucrada en estos campos. Es un triángulo sobre la superficie de una esfera que tiene uno de sus ángulos como ángulo recto (90°). Este concepto es particularmente útil porque simplifica muchos cálculos en trigonometría esférica. Sus características principales son: Tiene un ángulo recto (90°); se forma en la superficie de una esfera; sus lados son arcos de círculos máximos.

Entre los usos principales se tiene la Navegación Astronómica que sirve para calcular la posición de una embarcación o de una aeronave utilizando para esto observaciones de cuerpos celestes; además se puede determinar el acimut y la altura de una estrella. Las fórmulas clave de Napier son especialmente útiles para resolver triángulos esféricos rectos. Estas incluyen:

1. $\sin(a) = \tan(b) * \cot(C)$

2. $\sin(a) = \sin(c) * \sin(A)$

3. $\cos(c) = \cos(a) * \cos(b)$

4. $\cot(B) = \cos(b) * \tan(C)$

5. $\tan(a) = \sin(b) * \tan(A)$

Donde a, b, c son los lados y A, B, C son los ángulos opuestos a estos lados respectivamente.

Ejemplo de aplicación:

Supongamos que un navegante quiere encontrar su latitud observando la estrella Polar. El triángulo esférico recto se formaría con: el polo celeste; el cenit del observador y la posición de la estrella Polar

Usando el ángulo de elevación de la estrella Polar y las fórmulas de Napier, el navegante puede calcular su latitud.

Ventajas: simplifica cálculos complejos en la esfera; permite resolver problemas de navegación y astronomía con mayor facilidad; es la base para muchos algoritmos en software de navegación y astronomía.

Formamos un triángulo esférico usando:

- El polo norte (P)

- Los dos aeropuertos (A y B)

- Un arco de meridiano desde el polo al punto más cercano a B en el paralelo de A

Este arco de meridiano forma un ángulo recto con el paralelo, creando así un triángulo esférico recto.

Paso 2: Identificar los elementos del triángulo

- a: colatitud de A (90° - 40° = 50°)

- b: colatitud de B (90° - 50° = 40°)

- C: diferencia de longitud (75° - 30° = 45°)

- c: distancia entre A y B (lo que queremos calcular)

Paso 3: Aplicar las fórmulas de Napier

Las fórmulas de Napier para triángulos esféricos rectos son:

1. $\sin(a) = \tan(c) * \cot(C)$

2. $\cos(a) = \cos(b) / \sin(c)$

3. $\cos(b) = \cos(a) * \sin(c)$

4. $\tan(b) = \tan(c) * \cos(C)$

5. $\sin(C) = \sin(c) * \sin(b)$

Paso 4: Calcular la distancia c

Usaremos la fórmula 5: $\sin(C) = \sin(c) * \sin(b)$

Reordenando: $\sin(c) = \sin(C) / \sin(b)$

Sustituyendo los valores:

$\sin(c) = \sin(45°) / \sin(40°)$

$c = \arcsin(\sin(45°) / \sin(40°))$

$c \approx 51.15°$

Paso 5: Convertir a distancia lineal

La distancia angular (51.15°) se convierte a kilómetros multiplicando por el radio de la Tierra (aproximadamente 6371 km) y por $\pi/180$:

Distancia = $51.15 * (\pi/180) * 6371 \approx 5692$ km

Paso 6: Verificación (opcional)

El piloto podría verificar este resultado usando la fórmula del coseno de la trigonometría esférica:

$\cos(c) = \sin(\varphi 1) * \sin(\varphi 2) + \cos(\varphi 1) * \cos(\varphi 2) * \cos(\Delta\lambda)$

Donde $\varphi 1$ y $\varphi 2$ son las latitudes, y $\Delta\lambda$ es la diferencia de longitud.

Usando las fórmulas de Napier, se ha calculado que la distancia ortodrómica entre los dos aeropuertos es de aproximadamente 5692 km. Es importante notar que, en la práctica moderna, los pilotos generalmente usan computadoras de vuelo o software especializado para estos cálculos. Sin embargo, entender estos principios es crucial para la planificación de vuelos y para situaciones donde la tecnología pueda fallar.

D. Ley de Cosenos

La Ley de los Cosenos esféricos es una fórmula fundamental en trigonometría esférica, utilizada para resolver triángulos en la superficie de una esfera. Es especialmente útil en navegación, astronomía y geodesia.

Descripción teórica:

La Ley de los Cosenos esféricos establece que para un triángulo esférico con lados a, b, c (medidos en radianes o grados) y ángulos opuestos A, B, C respectivamente:

$$\cos(a) = \cos(b) * \cos(c) + \sin(b) * \sin(c) * \cos(A)$$

Esta fórmula se puede rotar para obtener expresiones equivalentes para cos(b) y cos(c).

Características importantes: Relaciona tres lados y un ángulo del triángulo esférico; permite calcular un lado desconocido si se conocen los otros dos lados y el ángulo opuesto al lado desconocido; Es análoga a la Ley de los Cosenos en geometría plana, pero adaptada a la superficie curva de una esfera.

Aplicaciones:

- Cálculo de distancias entre puntos en la superficie terrestre.

- Determinación de posiciones en navegación astronómica.

- Resolución de problemas en astronomía esférica.

Ejemplo práctico:

Supongamos que queremos calcular la distancia entre dos ciudades en la superficie de la Tierra:

Ciudad A: Latitud 40°N, Longitud 75°W

Ciudad B: Latitud 50°N, Longitud 30°W

Paso 1: Convertir las coordenadas a un triángulo esférico

- a: distancia angular entre las ciudades (lo que queremos calcular)

- b: colatitud de A = 90° - 40° = 50°

- c: colatitud de B = 90° - 50° = 40°

- A: diferencia de longitud = |75° - 30°| = 45°

Paso 2: Aplicar la Ley de los Cosenos esféricos

$\cos(a) = \cos(50°) * \cos(40°) + \sin(50°) * \sin(40°) * \cos(45°)$

Paso 3: Resolver la ecuación

$\cos(a) \approx 0.7120$

$a = \arccos(0.7120) \approx 0.7857$ radianes

Paso 4: Convertir a kilómetros

Distancia = 0.7857 * 6371 km ≈ 5006 km

Donde 6371 km es el radio medio de la Tierra.

La distancia aproximada entre las dos ciudades es de 5006 km. Este ejemplo demuestra cómo la Ley de los Cosenos esféricos permite calcular distancias sobre la superficie terrestre utilizando solo las coordenadas geográficas de los puntos. Es una herramienta poderosa en navegación y geografía, permitiendo cálculos precisos que tienen en cuenta la curvatura de la Tierra.La Ley de los Cosenos esféricos es fundamental en la resolución de problemas más complejos en navegación, como la determinación de rutas óptimas y la planificación de vuelos de larga distancia.

E. Corrección por curvatura terrestre

La corrección por curvatura terrestre es un ajuste crucial en mediciones de larga distancia sobre la superficie de la Tierra, especialmente en topografía, geodesia y navegación. Esta corrección es necesaria porque la Tierra no es plana, y su curvatura afecta significativamente las mediciones a gran escala.

Descripción teórica: La curvatura terrestre causa que objetos distantes parezcan más bajos de lo que realmente son cuando se observan desde un punto elevado. Esto se debe a que la línea de visión tangente a la Tierra diverge gradualmente de la superficie curva.

La fórmula básica para la corrección por curvatura terrestre es:

$C = D^2 / (2R)$

Donde:

C = Corrección por curvatura

D = Distancia horizontal entre los puntos

R = Radio de la Tierra (aproximadamente 6,371 km)

Es importante notar que esta fórmula asume que la Tierra es una esfera perfecta, lo cual es una aproximación suficiente para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Aplicaciones: topografía y agrimensura; Ingeniería civil (diseño de carreteras, canales, etc.); Navegación marítima y aérea; Observaciones astronómicas

Ejemplo práctico:

Supongamos que estamos midiendo la altura de un faro distante desde la costa usando un teodolito.

Datos:

- Distancia al faro: 10 km

- Altura del teodolito sobre el nivel del mar: 5 m

- Lectura del teodolito (ángulo vertical): -0.05° (depresión)

Paso 1: Calcular la corrección por curvatura

$C = D^2 / (2R)$

$C = (10{,}000\ m)^2 / (2 * 6{,}371{,}000\ m)$

$C \approx 7.85\ m$

Paso 2: Calcular la altura aparente del faro

Usando trigonometría simple:

Altura aparente = 5 m - (10,000 m * tan(-0.05°)) ≈ 13.72 m

Paso 3: Aplicar la corrección

Altura real = Altura aparente + Corrección

Altura real = 13.72 m + 7.85 m ≈ 21.57 m

Paso 4: Considerar la refracción atmosférica (opcional)

La refracción atmosférica tiende a contrarrestar parcialmente el efecto de la curvatura terrestre. Una regla práctica común es que la refracción reduce el efecto de la curvatura en aproximadamente 1/7.

Corrección final = 7.85 m - (7.85 m / 7) ≈ 6.73 m

Altura real considerando refracción ≈ 13.72 m + 6.73 m ≈ 20.45 m

Sin la corrección por curvatura terrestre, habríamos subestimado significativamente la altura del faro. La medición inicial sugería una altura de solo 13.72 m, pero después de aplicar la corrección (y considerar la refracción), encontramos que la altura real es de aproximadamente 20.45 m.

Este ejemplo muestra la importancia de la corrección por curvatura terrestre en mediciones de larga distancia. Sin esta corrección, los errores pueden ser sustanciales, especialmente en aplicaciones que requieren alta precisión como la ingeniería civil o la navegación marítima. Es importante señalar que, en la práctica moderna, muchos instrumentos de medición y software especializado incorporan automáticamente estas correcciones, pero entender el principio subyacente sigue siendo crucial para los profesionales en campos relacionados.

Resultados y Conclusiones

La investigación sobre el uso de las matemáticas en la navegación marítima durante el descubrimiento de América revela que estas disciplinas fueron fundamentales para la planificación y ejecución de los viajes de exploración. Los navegantes, como Cristóbal Colón, dependían de cálculos precisos de distancia y tiempo, así como de instrumentos matemáticos como el astrolabio y la brújula, que les permitieron determinar su posición en el océano. Sin estos conocimientos, la exploración habría sido mucho más arriesgada y menos efectiva.

El astrolabio, un dispositivo basado en principios matemáticos y astronómicos, permitía a los navegantes medir la altura de los astros y calcular su latitud con razonable precisión. Este instrumento, junto con la brújula, que ayudaba a mantener una dirección constante, fue crucial para trazar rutas seguras en el vasto océano. La combinación de estos instrumentos facilitó la navegación y la exploración de nuevas tierras.

Las matemáticas también jugaron un papel vital en la cartografía. Los cartógrafos aplicaron principios geométricos y trigonométricos para crear mapas más precisos, lo que era esencial para la planificación de rutas y la identificación de obstáculos en el mar. La utilización de la trigonometría permitió a los navegantes calcular distancias y ángulos entre puntos de referencia, mejorando significativamente la precisión de los mapas de la época.

En conclusión, el uso de las matemáticas en la navegación durante el descubrimiento de América no solo facilitó la exploración, sino que también sentó las bases para el desarrollo de técnicas de navegación más avanzadas en el futuro. Sin estos avances matemáticos, la capacidad de los exploradores para aventurarse en lo desconocido habría sido considerablemente limitada, lo que subraya la importancia de las matemáticas en la historia de la navegación.

Referencias

Juan Antonio García Cruz. (2009). Cartografía, matemáticas y navegación: El arte de encontrar puerto. En La Proporción: arte y matemáticas

Fernández M. (2003). Disertación sobre la historia de la náutica y de las ciencias matemáticas

Varela, C. (1984). *Cristóbal Colón, Textos y documentos completos*. Madrid: Alianza Editorial,

: