Revista MICA.
Volumen _ No. _
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero – Junio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 72 - 80
Recibido: mayo 29 de 2023
Aprobado: junio 25 de 2023

La fórmula de Cardano: una propuesta para su implementación
The Cardano formula: a proposal for its implementation

Autores

Miguel Angel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
miguel.lopez@uan.edu.mx

Deisy Nereyda Velázquez Salazar
Universidad de Baja California
Nueva Galería, Campus Tepic
Eyde1505@gmail.com

La fórmula de Cardano: una propuesta para su implementación
The Cardano formula: a proposal for its implementation

Resumen

Esta investigación se presenta la fórmula de Cardano qué es una herramienta utilizada para encontrar las soluciones de una ecuación de tercer grado (también conocida como una ecuación cúbica), y se aplica a la solución de un ejercicio práctico. Fue desarrollada por el matemático renacentista italiano Gerolamo Cardano en el siglo XVI. El primer paso en la aplicación de la fórmula de Cardano es reducir la ecuación cúbica a una forma especial llamada forma canónica, donde se elimina el término cuadrático dividiendo toda la ecuación por el coeficiente principal “a”. A continuación, se introduce una variable auxiliar llamada “t”. Ahora viene el paso crucial de la fórmula de Cardano. Se introducen dos variables auxiliares, “p” y “q”. Finalmente, utilizando estas variables auxiliares, se obtienen las soluciones de la ecuación cúbica original.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Palabras clave: Raíces, Solución Cubica, Numero Real, Función Polinomial, Tales de Mileto, Triangulo Rectángulo.

Abstract

This research presents the Cardano formula which is a tool used to find the solutions of a quadratic equation (also known as a cubic equation), and it is applied to the solution of a practical exercise. It was developed by the Italian Renaissance mathematician Gerolamo Cardano in the 16th century. The first step in applying Cardano's formula is to reduce the cubic equation to a special form called the canonical form, where the quadratic term is eliminated by dividing the entire equation by the leading coefficient “a”. Next, an auxiliary variable called “t” is introduced. Now comes the crucial step of the Cardano formula. Two auxiliary variables are introduced, “p” and “q”. Finally, using these auxiliary variables, the solutions of the original cubic equation are obtained.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Keywords: Roots, Cubic Solution, Real Number, Polynomial Function, Thales of Miletus, Right Triangle.

Introducción

En matemáticas, la fórmula cúbica de Cardano, también conocida como la fórmula de Cardano-Tartaglia, es una destacada contribución matemática que revolucionó el estudio de las ecuaciones cúbicas. Desarrollada por el matemático italiano del siglo XVI, Gerolamo Cardano, por lo tanto, la fórmula proporciona una solución algebraica para ecuaciones cúbicas generales. Desde hace mucho tiempo, ha sido considerada una obra maestra del pensamiento matemático y ha influido en muchas generaciones. En esta investigación, se explora la utilidad de la fórmula cúbica de Cardano, su aplicación en un ejercicio histórico.

Para conocer la importancia de la ecuación cúbica, en el campo matemático, se cita a Cardano, en su obra "Ars Magna" (1545), expresa: "La resolución de ecuaciones cúbicas es un desafío que ha perseguido a los matemáticos durante siglos. Mi fórmula ofrece una solución general y abre nuevas puertas para la exploración de este campo" (Cardano, 1545), esto se refiere a que en otros tiempos no era tan sencillo calcular ejercicios con ecuaciones de tercer grado. Ahora una cosa es el uso de la fórmula para las ecuaciones cúbicas, pero otra es su comprensión, por eso según Tartaglia, otro matemático italiano contemporáneo de Cardano, en su correspondencia con él en 1539: "Descubrir esta fórmula fue un logro trascendental en mi carrera. Me alegra haber contribuido a la comprensión de las ecuaciones cúbicas" (Tartaglia, 1539), es decir ciertos matemáticos se han preocupado por dar a conocer esta fórmula de una manera que se pueda entender, debido a su complejidad.

Algunos ejercicios que existen, pueden ser un poco difíciles para su solución, pero hay científicos como Descartes que mencionan la alternativa de la solución por medio de la fórmula de Cardano, como se encuentra en su obra "La Géométrie" (1637), menciona: "La fórmula de Cardano-Tartaglia demuestra el poder del álgebra y su capacidad para resolver problemas aparentemente intratables. Es un hito en la historia de las matemáticas" (Descartes, 1637, p. 17). Unas de las menciones de uno de los grandes matemáticos de la historia, como Carl Friedrich Gauss, que es uno de los más influyentes de todos los tiempos, escribió en su diario en 1816: "La fórmula de Cardano representa una de las contribuciones más significativas en el campo de las ecuaciones cúbicas y ha sentado las bases para futuros avances en este campo" (Gauss, 1816, p. 18), lo cual nos muestra el gran avance en el descubrimiento de esta solución a una ecuación cúbica. Otra visión diferente es la de D. E. Smith, en su libro "History of Mathematics" (1925), afirma: "La fórmula cúbica de Cardano marcó un punto de inflexión en la historia de las matemáticas. Su ingeniosa solución abrió el camino para el desarrollo de técnicas algebraicas más sofisticadas" (Smith, 1925, p. 28). Lo cual el autor nos hace ver, el cambio en la forma de ver una solución a un ejercicio que contenga una ecuación de tercer grado.

Justificación

Como ya se conoce la fórmula cúbica de Cardano es una herramienta matemática invaluable que permite resolver ecuaciones cúbicas de la forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. A pesar de que su descubrimiento se remonta al siglo XVI, su relevancia perdura hasta nuestros días debido a su utilidad en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería. Aunque la solución analítica de la ecuación cubica, suele ser compleja en la práctica para resolver ejercicios, según Brown menciona la importancia del uso de esta herramienta: "La fórmula cúbica de Cardano es un recurso indispensable para resolver problemas de ingeniería estructural. En la determinación de las raíces de ecuaciones cúbicas, esta fórmula proporciona una solución exacta que facilita el diseño y análisis de estructuras complejas" (Brown, 2018, p. 126). Es muy común utilizar la formula general de las cuadráticas, debido a su fama y cierto nivel de simplicidad, pero es importante dar a conocer que la formula general de tercer grado tiene su lugar en el mundo analítico del algebra, dar a conocer el campo de aplicación diverso puede cambiar la visión de este tipo de solución de tercer grado, como lo dice: "La fórmula cúbica de Cardano es una de las herramientas fundamentales en el álgebra y el análisis matemático. Su aplicación se extiende a campos como la física, la ingeniería y la economía, donde el estudio de ecuaciones cúbicas es esencial para resolver problemas prácticos" (Smith, 2010, p. 52).

Aunque existe otras aplicaciones variadas para la solución de raíces cubicas, ya sea en el campo de las matemáticas, física, economía, etc., lo importante es desarrollar y fortalecer el pensamiento matemático en los estudiantes, que a su vez esas habilidades serán importantes en la vida profesional de estos, como lo menciona el autor: "A través del estudio de la fórmula cúbica de Cardano, los estudiantes pueden adquirir habilidades analíticas y de pensamiento crítico, además de comprender mejor los conceptos fundamentales de las ecuaciones algebraicas" (Brown, 2018, p.

205). Es por esto la importancia el conocer que resolver un ejercicio de tercer grado, mediante está formula no será la forma más sencilla, pero si tiene un valor incalculable desde el punto de vista histórico, por lo tanto ese es el reto, mostrar delo que puede hacer esta fórmula, como lo dice el autor: "Aunque no es el método más eficiente para resolver ecuaciones cúbicas en la actualidad, la fórmula cúbica de Cardano tiene un valor educativo incalculable al enseñar a los estudiantes sobre la historia de las matemáticas y los desafíos a los que se enfrentaron los matemáticos pioneros" (Davis, 2015, p. 159).

Soporte Teórico

La ecuación de tercer grado conocida comúnmente como "La Cúbica", o como la fórmula de Cardano, para las raíces cúbicas, es una herramienta matemática desarrollada por el matemático renacentista italiano Gerolamo Cardano en el siglo XVI. Esta fórmula permite encontrar las raíces de una ecuación cúbica de la forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dónde: a, b, c y d son coeficientes reales o complejos y "x" es la variable desconocida o de tipo independiente. La fórmula de Cardano se basa en el uso de números complejos y tiene tres etapas principales: reducción a la forma canónica, resolución de la ecuación reducida y reconstrucción de las raíces de la ecuación original. A continuación, se presentan tres etapas clave del marco teórico de la fórmula de Cardano:

1. Reducción a la forma canónica: La primera etapa consiste en reducir la ecuación cúbica a su forma canónica, eliminando el término cuadrático. Esto se logra mediante una sustitución adecuada. Al realizar la sustitución $x = y - \left(\frac{b}{3a}\right)$, la ecuación cúbica se convierte en una ecuación de la forma $y^3 + py + q = 0$, en dónde "p" y "q" son nuevos coeficientes.

2. Resolución de la ecuación reducida: Una vez que la ecuación se ha reducido a la forma canónica, se aplica la fórmula de Cardano para encontrar una de las raíces reales o complejas de la ecuación reducida. La fórmula de Cardano se expresa como:

$$y = \left(\frac{q}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} - \frac{q}{2}} - \frac{p}{3} - \frac{\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}$$

Esta fórmula permite calcular el valor de "y", que es una de las raíces de la ecuación reducida.

3. Reconstrucción de las raíces de la ecuación original: Una vez obtenida la raíz y de la ecuación reducida, se utiliza una serie de transformaciones algebraicas para reconstruir las tres raíces de la ecuación original. Estas transformaciones se basan en las propiedades de los números complejos y permiten obtener las raíces reales o complejas de la ecuación cúbica original.

Metodología

En esta investigación se lleva a cabo la solución ejercicio planteado en el siglo XIII, en el cual resulta un planteamiento de una ecuación de grado tres, que es un polinomio de grado máximo tres. Por lo tanto, esta fórmula se aplica como una solución viable y de fácil uso. La ecuación general de las cubicas demostrará que puede dar solución a este ejercicio en particular, y además se muestra su desarrollo completo en operaciones de números reales, para llegar a la respuesta.

En la aplicación de la formula general de las cubicas es importante, tener mucho cuidado en el empleo de las operaciones con los números reales, respetando sus signos y sus operadores, también es necesario de usar herramientas matemáticas con el Teorema de Tales de Mileto y el Teorema de Pitágoras, así como tener en cuenta con claridad el conocimiento de las funciones trigonométricas.

Objetivo

Calcular un ejercicio práctico, mediante el uso de la fórmula de Cardano, para ecuaciones de tercer grado.

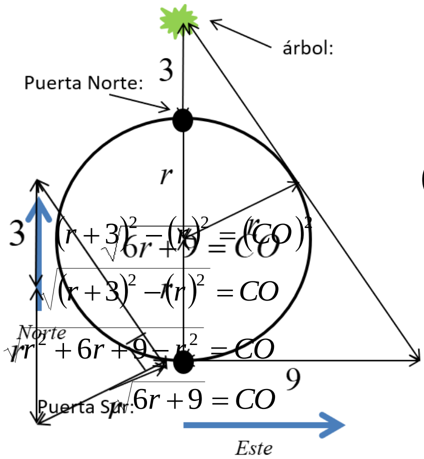
Hipótesis

Al calcular un ejercicio con la fórmula general de tercer grado, es un procedimiento entendible y accesible.

Solución a un ejercicio

En el siguiente ejercicio El problema siguiente, el cuál fue planteado en el siglo XIII por el matemático Chino Qin Jinshao (Imagen recuperada de https://www.biografiasyvidas.com/biografia/q/qin_jiushao.htm), (Qin Jiushao o Ts'in Kieu-shao; Sichuan, hacia 1202 - Meixian, hacia 1261) Matemático chino. Debe su fama a un importante libro: el Tratado de matemáticas en nueve capítulos (1247).

Este ejercicio dice lo siguiente: Una ciudad está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puerta norte y caminando 3 li hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar 9 li hacia el este para ver el mismo árbol. Calcular el diámetro de la ciudad.



$$(r+3)^2-(r)^2=(CO)^2$$
$$\sqrt{(r+3)^2-(r)^2}=CO$$
$$\sqrt{r^2+6r+9-r^2}=CO$$
$$\sqrt{6r+9}=CO$$

Analizando el triangulo rectangulo de la parte superior, de esta manera se calcula el cateto opuesto (CO), con el apoyo del teorema de Pitágoras:

$$(r+3)^2=(r)^2+(CO)^2$$

Los dos triángulos son semejantes por lo tanto poseen la misma pendiente, y aplicando el Teorema de Tales de Mileto:

$$\frac{2r+3}{9}=\frac{\sqrt{6r+9}}{r}$$
$$(2r+3)r=9\sqrt{6r+9}$$
$$[(2r+3)r]^2=[9\sqrt{6r+9}]^2$$
$$(2r+3)^2r^2=81(6r+9)$$
$$(2r+3)^2r^2=(81)(3)(2r+3)$$
$$(2r+3)^2r^2=243(2r+3)$$
$$\frac{(2r+3)^2r^2}{(2r+3)}=243$$
$$(2r+3)r^2=243$$
$$2r^3+3r^2-243=0$$
$$\frac{2r^3+3r^2-243}{2}=\frac{0}{2}$$

En una función de tercer grado se conoce que su forma general es:

$$r^3+\frac{3}{2}r^2-\frac{243}{2}=0$$

Esta es una ecuación de tercer grado y se resuelve mediante la fórmula de Cardano:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

Donde:

$$p=\frac{3b-a^2}{3}$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{a}{3}$$

$$q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$$

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Calculando "r" mediante Cardano:

$$a=\frac{3}{2};b=0;c=-\frac{243}{2}$$

$$p=\frac{3b-a^2}{3}=\frac{3(0)-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}=\frac{-\frac{9}{4}}{3}=-\frac{9}{12}=\boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}=\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^3-9\left(\frac{3}{2}\right)(0)+27\left(-\frac{243}{2}\right)}{27}=\frac{2\left(\frac{27}{8}\right)-\frac{6561}{2}}{27}=\frac{\frac{54}{8}-\frac{6561}{2}}{27}=\frac{\frac{54-26244}{8}}{27}$$

$$=\frac{\frac{-26190}{8}}{27}=\boxed{-\frac{26190}{216}}$$

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{-\frac{26190}{216}}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{3}{4}}{3}\right)^3=\frac{\frac{685916100}{46656}}{4}+\left(\frac{-\frac{27}{64}}{27}\right)=\frac{685916100}{186624}-\frac{27}{(27)(64)}=\frac{685916100}{186624}-\frac{1}{64}$$

$$=\frac{43898630400-186624}{11943936}=\frac{43898443776}{11943936}=\boxed{\frac{29403}{8}}$$

Calculando "r" si "x=r"

$$x=r=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{a}{3}=\sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{26190}{216}\right)}{2}+\sqrt{\frac{29403}{8}}}+\sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{26190}{216}\right)}{2}-\sqrt{\frac{29403}{8}}}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{3}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{26190}{432}+\sqrt{\frac{29403}{8}}}+\sqrt[3]{\frac{26190}{432}-\sqrt{\frac{29403}{8}}}-\frac{3}{6}=\sqrt[3]{60.625+\sqrt{3675.375}}+\sqrt[3]{60.625-\sqrt{3675.375}}-\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt[3]{60.625+60.6248}+\sqrt[3]{60.625-60.6248}-0.5=\sqrt[3]{121.2498}+\sqrt[3]{0.00012}-0.5$$

$$=4.949488775+0.058480354-0.5=\boxed{4.507969129\ldots}$$

Entonces el radio de la ciudad es de 4.5 li y su diámetro es de 9 li.

En la actualidad un "Li" es una unidad de longitud tradicional china y se ha estandarizado en 500 metros del Sistema Internacional de Unidades, aunque históricamente su valor osciló considerablemente entre distancias algo menores y mayores según los periodos. Entonces según el resultado del ejercicio el radio de la cuidad es de 4.5 Li, lo cual equivale a 2,250 metros, o 9 Li de diámetro que son 4,500 metros.

Conclusiones

Con este ejemplo, la fórmula de Cardano se puede decir que es una poderosa herramienta para resolver ecuaciones cúbicas. A través de su uso, se pueden encontrar soluciones exactas, incluso en casos en los que la factorización o métodos numéricos no son viables. La fórmula, aunque compleja y extensa, nos brinda una guía paso a paso para encontrar las raíces de la ecuación, lo cual es de gran utilidad en diversos campos de la matemática y la física. Sin embargo, también es importante destacar que la fórmula de Cardano tiene sus límites. No todas las ecuaciones cúbicas pueden resolverse mediante esta fórmula. Además, la fórmula puede conducir a resultados complejos y difíciles de interpretar en ciertos casos.

Bibliografía

Brown, A. (2018). Mathematical Methods for Engineers. Springer.

Cardano, G. (1545). Ars Magna.

Davis, J. (2015). Mathematics: A Practical Odyssey. Cengage Learning.

Descartes, R. (1637). La Géométrie.

Gauss, C. F. (1801). Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig: Fleischer.

Smith, D. E. (1925). History of Mathematics.

Smith, P. (2010). Mathematical Concepts and Applications. McGraw-Hill Education.

Tartaglia, N. (1539). Correspondencia personal.