



Revista MICA.
Volumen 4 No. 8
ISSN: 2594-1933
Periodo: Julio – Diciembre de 2021
Tepic, Nayarit. México
Pp. 37 - 48
Recibido: 12 de noviembre de 2021
Aprobado: 26 de diciembre de 2021

**Ecuación cuadrática: análisis y propuesta
para su implementación**

**Quadratic equation: analysis and proposal
for its implementation**

Miguel Ángel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
miguel.lopez@uan.edu.mx

Aileen Armida López Rojas
Instituto Tecnológico de Tepic
aiarlopezro@ittepic.edu.mx

Danna Montserrat López Rojas
Universidad Tecnológica de Nayarit
gt-290065@utnay.edu.mx

Ecuación cuadrática: análisis y propuesta para su implementación

Quadratic equation: analysis and proposal for its implementation

Resumen

El presente trabajo expone una experiencia de desarrollo, implementación de la ecuación cuadrática, la propuesta surgió de la necesidad palpable en muchos centros educativos, de contar con una herramienta dirigida al profesor para la enseñanza y el aprendizaje del tema. Se presenta la demostración de la expresión final de la formula general de las cuadráticas, que es una herramienta muy sencilla de usar, pero puede ser compleja de entender en su origen y demostración. Hoy en día con el uso de la tecnología, las aplicaciones, los softwares calcular los valores de una función no lineal como en la ecuación de segundo grado es muy sencillo y rápido de efectuar. Pero se considera que es necesario demostrar de dónde viene esta fórmula con la finalidad de utilizarla de manera rápida y adecuada.

Palabras clave: Raíces, Formula General, Numero Real, Función, No Lineal.

Abstract

This work presents a development experience, implementation of the quadratic equation, the proposal arose from the palpable need in many educational centers, to have a tool aimed at the teacher for teaching and learning the subject. The proof of the final expression of the general formula of quadratics is presented, which is a very simple tool to use, but can be complex to understand in its origin and proof. Nowadays, with the use of technology, applications, and software, calculating the values of a non-linear function as in the second degree equation is very simple and fast to perform. But it is considered that it is necessary to demonstrate where this formula comes from in order to use it quickly and properly.

Keywords: Roots, General Formula, Real Number, Function, Nonlinear.

Introducción

En el transcurrir de los años la ecuación cuadrática y la función de segundo grado han pasado de ser una curiosidad algebraica a un objeto de gran utilidad para la ciencia, la

economía, la ingeniería, et. Su gráfica conocida como parábola que es una curva en forma de U representa trayectorias de proyectiles, de chorros de agua de una fuente o bien puede ser incorporada en estructuras como el caso de los reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales y los faros de los carros. Las funciones cuadráticas ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios, graficar el curso de objetos en movimiento, y asistir en la determinación de valores mínimos y máximos. Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño.

Comúnmente la ecuación cuadrática se utiliza en situaciones donde dos cosas se multiplican juntas y ambas dependen de la misma variable. Por ejemplo, cuando se trabaja con un área. Si ambas dimensiones están escritas en términos de la misma variable, se usa una ecuación cuadrática. Porque la cantidad de un producto vendido normalmente depende del precio, a veces se utiliza una ecuación cuadrática para representar las ganancias como un producto del precio y de la cantidad vendida. Las ecuaciones cuadráticas también son usadas donde se trata con la gravedad, como por ejemplo la trayectoria de una pelota o la forma de los cables en un puente suspendido.

La fórmula general de las cuadráticas, es una de las herramientas clave que se descubrieron desde tiempos antiguos y muy útil en los tiempos actuales, para esta investigación el enfoque es primero mostrar cómo se deduce su fórmula, la cual nos permite dar solución a una ecuación de segundo grado encontrando sus raíces. Primero se muestra el procedimiento para llegar poder calcular las raíces, además de dar conocer la ecuación de segundo grado y su forma gráfica.

Una aplicación muy común y fácil de entender de una función cuadrática es la trayectoria seguida por objetos lanzados hacia arriba y con cierto ángulo. En estos casos, la parábola representa el camino de la pelota (o roca, o flecha, o lo que se haya lanzado). Si se grafica la distancia en el eje x y la altura en el eje y, la distancia que del lanzamiento será el valor de x cuando y es cero. Este valor es una de las raíces de una ecuación cuadrática, o intersecciones en x, de la parábola. Sabemos cómo encontrar las raíces de una ecuación

cuadrática — ya sea factorizando, completando el cuadrado, o aplicando la fórmula cuadrática

Referente a los conocimientos que han llegado a nuestros días, según Manuel, Emilio y Mercedes (2007) Diofanto de Alejandría (Siglo III o Siglo IV), fue quien le dio un mayor impulso a este tema. Es por esto que este conocimiento se encontraba en la biblioteca de Alejandría y esto fue probablemente durante el reinado de Ptolomeo II (285-246 a. C.). Esta herramienta fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya (1070-1136) en su “Liber Embadorum”, se encuentra esta herramienta que permitió llevar este tipo de soluciones a este continente. Posteriormente con el descubrimiento de América en 1492, esta herramienta se dio a conocer en el nuevo mundo, a su debido momento.

Justificación

El tema de ecuación de segundo grado en diferentes niveles educativos presenta serias dificultades cognoscitivas y metodológicas, reflejadas en los resultados de las diferentes pruebas estandarizadas (PISA, Exani, Excale, Enlace); al analizar por objetivos el rendimiento académico de los estudiantes, éste tema aparece con el más bajo promedio. Se ha puesto de manifiesto que la comprensión de los problemas que vienen planteado es quizá la mayor dificultad, sin embargo la resolución de éstos requiere del manejo de algoritmos que los estudiantes no aplican.

La fórmula general de las cuadráticas, es una de las herramienta más utilizadas y adecuadas en la solución de polinomios de segundo grado. Es por esto que nos da a conocer las raíces reales o complejas de una ecuación no lineal de este tipo. Aunque existen otras técnicas para encontrar las raíces o factores de una expresión de este tipo, pero se enfocan a raíces enteras. Por esto la fórmula general de las cuadráticas es la más adecuada para encontrar las raíces reales o de forma compleja de una ecuación de segundo grado, esto es de acuerdo con Manuel, Emilio y Mercedes (2007), menciona que es una vía que se puede complicar, sobre todo cuando se busca factores irracionales y/o fraccionarios Thomas Heath (1910).

Marco Teórico

La presente propuesta se enmarca didácticamente en los siguientes tópicos teóricos: El primero, las ideas previas, definidas como conocimientos que usan los estudiantes para interpretar los diversos fenómenos antes de recibir una enseñanza escolarizada científica. Se relacionan con los errores conceptuales cometidos en algún área de la ciencia. Sin embargo, no siempre son un conocimiento erróneo, sino incompleto o no compatible del todo con el conocimiento o conceptos científicos (Hierrezuelo y Montero, 2006). Las ideas previas se toman como punto de partida para el diseño de actividades didácticas y toma de conocimientos iniciales del estudiante.

El segundo, la modelización matemática, definida como el proceso de transitar un fenómeno en el mundo real a un modelo matemático que lo represente (interpretación inductiva), y que dicha representación ya sea aritmética, geométrica o algebraica permita interpretar deductivamente el fenómeno (Confrey y Maloney, 2007; Cirillo et. al, 2016; Cuevas, Villamizar y Martínez, 2017).

El tercero, el cambio conceptual, definido como el proceso de transitar las ideas previas hacia aquellas más aceptadas desde el conocimiento científico (Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982). Sin embargo, Pozo (2007), expone una propuesta menos radical, mencionando que existen diferentes tipos de cambio conceptual; y lo deslinda como un proceso de reestructurar el conocimiento en el aprendizaje y la enseñanza de la ciencia, considerando que las ideas previas no necesariamente deben ser reemplazadas, sino reestructuradas a través del uso de las representaciones, las cuales pueden ser matemáticas.

La ecuación de segundo grado conocida comúnmente como “La Parábola”, su importancia en el estudio de las ciencias exactas es mostrar su esencia matemática, y a la vez mostrar su complejidad Tannery P. (1974). Sin embargo, algo que se ve y que se utiliza en forma tan simple, u demostración en realidad no lo es. Las aplicaciones de una ecuación de segundo grado son diversos en este caso sólo se mostrará su esencia matemática.

Como Definición: La **potenciación** se define como una multiplicación de factores iguales, esto es, si, entonces... para una función de segundo grado se tendrá $a * a =$

$a^{1+1} = a^2$, como su máximo exponente. El grado de una ecuación o un sistema de ecuaciones lo determina el exponente máximo que afecta la incógnita. Entonces Una ecuación de **segundo grado** o **cuadrática** es aquella que después de efectuar las operaciones indicadas y de haber efectuado las reducciones o simplificaciones posibles y de pasar a uno de los dos miembros todos los elementos e igualarla a cero, el *exponente mayor es dos*.

Ahora la ecuación de segundo es una función no lineal y su forma completa, se expresa como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En dónde “a” es el coeficiente que acompaña a la variable al cuadrado, “b” es el coeficiente que acompaña a la variable lineal, “c” es el coeficiente independiente.

Se puede presentar la ecuación de segundo grado en formas incompletas, como:

Cuadrática pura: $ax^2 + c = 0$; Cuadrática mixta: $ax^2 + bx = 0$

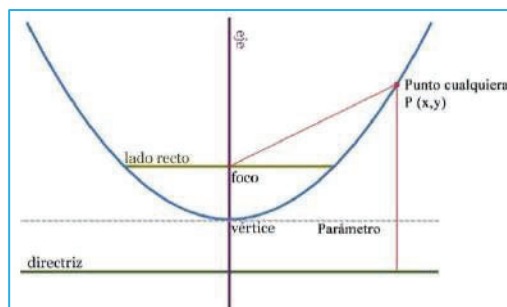
Para resolver una ecuación de segundo grado se pueden emplear cualquiera de los siguientes métodos:

- 1) Despejando la incógnita.
- 2) Por factorización.
- 3) Utilizando la fórmula general

Las ecuaciones incompletas es posible resolverlas sin necesidad de emplear la fórmula general, ya que solamente se hace el despeje, como se verá más adelante.

Al igual que la representación gráfica de las ecuaciones de primer grado que es una línea recta, al representar gráficamente una ecuación de segundo grado no siempre será igual, aunque todas las gráficas que se obtengan pertenecen a la familia de las cónicas. La ecuación cuadrática hasta el momento solo está afectada por una variable o incógnita, y se hace necesario conocer dos variables para localizar punto en el plano cartesiano, y que una de ellas este en función de la otra, tomando la ecuación propuesta en función de la variable “y”, esto es: $f(x) = y$

Y su grafica se puede representar en dos maneras principales, esto es según su apertura además posee los elementos de vértice, foco, cuerda, directriz y lado recto, es decir el signo que acompaña al escalar “a”, si este es positivo entonces la parábola abrirá hacia arriba, y si este es negativo entonces la parábola abrirá hacia abajo.



En el caso del empleo de la formula general de las cuadráticas, se conoce la expresión que nos permite calcular las raíces. Ahora veremos cómo se llega a esa fórmula general de las cuadráticas, se hará mediante el complemento del trinomio cuadrado perfecto.

Metodología

En esta investigación se hace una demostración para llegar a la ecuación de la formula general de las cuadráticas, con la finalidad de dar a conocer este proceso, el procedimiento se lleva a cabo mediante el complemento del trinomio cuadrado perfecto. Ahora con esta demostración se resolverá un ejercicio de segundo grado, en donde se dé a conocer su desarrollo.

Ahora dentro del procedimiento de solución se usarán las herramientas básicas del algebra elemental y son (leyes de exponentes y radicales):

Leyes de exponentes

- 1) Potencias con exponente cero.
- 2) Potencias con exponente uno.
- 3) Producto de potencias de igual base o multiplicación de potencias de igual base.
- 4) División de potencias de igual base o cociente de dos potencias con igual base.
- 5) Potencia de un producto o ley distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación.
- 6) Potencia de otra potencia.

7) Ley de exponente negativo.

Leyes de radicales

- 1) Ley de cancelación del radical.}
- 2) Raíz de una multiplicación o producto.
- 3) Raíz de una división o cociente.
- 4) Raíz de una raíz.
- 5) Raíz de una potencia.

En el caso de usar las reglas: Lo que está sumando pasa restando. Lo que está restando pasa sumando. Lo que está multiplicando pasa dividiendo. Lo que está dividiendo pasa multiplicando. Si está con exponente pasa con raíz.

Para el desarrollo de la formula general, se usará las reglas algebraicas necesarias, es decir no se usarán todas.

Así es como se llega a las raíces reales de este polinomio, a través de encontrar el trinomio cuadrado perfecto. En una función de segundo grado se conoce que su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tenemos la ecuación de las cuadráticas con los coeficientes a, b y c. Ahora dividiendo entre “a” ambos lados de la igualdad.

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

Se simplifica algebraicamente los términos semejantes:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Los términos que no poseen la variable “x” pasan al lado derecho de la igualdad.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

El siguiente paso es completar en el lado izquierdo de igualdad el término que forma el trinomio cuadrado perfecto. Este término es el cuadrado del segundo término del binomio al cuadrado es decir “b/2a”.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt[2]{\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2} = \sqrt[2]{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a} \right] = \sqrt[2]{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt[2]{\frac{-4a^2c + ab^2}{4a^3}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt[2]{\frac{a(-4ac + b^2)}{4a^3}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt[2]{\frac{(-4ac + b^2)}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt[2]{-4ac + b^2}}{\sqrt[2]{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces para encontrar las raíces de cualquier expresión de segundo grado se utiliza la formula general de la cuadráticas, que simplificada queda de la siguiente manera.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Objetivo

Dar a conocer el cálculo de las raíces reales, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Hipótesis

Dando a conocer la formula general de las cuadráticas a través de su complemento del trinomio cuadrado perfecto, ayuda a comprender mejor esta fórmula.

Solución a un ejercicio

En el siguiente ejercicio se tiene una ecuación de segundo grado y se pide las raíces reales. Ahora, en este caso se buscará complementar el trinomio cuadrado perfecto para comprender mejor la obtención de raíces cuadráticas.

$$x^2 + 8x + 15 = ?$$

Para conocer “x”, se dejan las variables de un solo lado. Por eso es necesario igualar a cero el polinomio.

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

Se despeja el escalar sin variable, al lado derecho de la igualdad.

$$x^2 + 8x = -15$$

Se busca completar el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo. Por eso se trabajará con la forma general de una función de segundo grado.

$$a^2 + 2ab + c^2 = 0$$

Ahora se sustituyen los valores equivalentes, en la forma general del segundo término para calcular el valor de “b” y de “b²”.

$$2ab = 8x$$

Sustituir los valores conocidos y despejar la variable que se busca “b” y “b²”.

$$2xb = 8x$$

$$b = \frac{8x}{2x}$$

$$b = 4$$

$$b^2 = 16$$

Colocar el valor correspondiente para completar el trinomio cuadrado perfecto en ambos lados de la igualdad.

$$x^2 + 8x + 16 = -15 + 16$$

$$(x + 4)^2 = 1$$

$$\sqrt[2]{(x + 4)^2} = \sqrt[2]{1}$$

$$(x + 4) = \pm 1$$

La raíz cuadrada genera dos valores uno positivo y otro negativo.

$$x_1 + 4 = +1$$

$$x_2 + 4 = -1$$

$$x_1 + 4 - 1 = 0$$

$$x_2 + 4 + 1 = 0$$

$$x_1 + 3 = 0$$

$$x_2 + 5 = 0$$

Conclusiones

Con este ejemplo de encontrar las raíces reales o en su caso complejas, se puede observar que se puede complicar el cálculo, a diferencia de usar directamente la herramienta de la formula general de las cuadráticas, es decir sólo sustituyendo los valores o coeficientes “a”, “b” y “c” de la función no lineal y resolver las operaciones aritméticas correspondientes. Aun así, dando a conocer este procedimiento, es interesante dar solución a un ejercicio en forma similar a la forma de la demostración de la formula general de las cuadráticas. En el ejercicio presentado se tiene una ecuación de segundo grado y se pidió las raíces reales. Ahora, en este caso se buscó complementar el trinomio cuadrado perfecto para comprender mejor la obtención de raíces cuadráticas.

Bibliografía

- Anfossi, A. (1949). Geometría Analítica. Editorial Progreso
- Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. y Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in School Mathematics. In C. Hirsch & A. McDuffie (Eds.), Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (p.p. 3–16).
- Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 57–68). US: Springer
- Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. Enseñanza de las Ciencias, 35(3), 129–150.

- Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*. 2ª ed. facsimil de la de Cambridge. Chicago: Powell's Bookstore.
- Hierrezuelo, J. & Montero, A. (2006). La ciencia de los alumnos: su utilización en la didáctica de la Física y Química. Fontamara: México.
- Muñoz, M., Fernández, E., Moral y Sánchez, M. (2007). La aritmética y el libro sobre los números poligonales. Editorial Madrid, Vol. 2
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., y Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211– 227.
- Pozo, J. (2007). Ni cambio ni conceptual: la reconstrucción del conocimiento científico como un cambio representacional. En Pozo, J. y F. Flores (eds.). Cambio conceptual y representacional en la enseñanza de la ciencia (pp. 73-89). Madrid: A. Machado libros y cátedra UNESCO de educación científica para América Latina y el Caribe.
- Suarez, M. (1994). Elementos de Algebra. Editorial Universidad del Valle
- Tipens, P. (1980). Física. MacGraw – Hill
- Tannery, P. (1974). *Diophantvs Alexandrinvs, Opera Omnia*. Stuttgart: Teubner.
- Viedma, J. (1962). Introducción a la Geometría Analítica. Editorial Norma
- Wexler, C; Montaner y Simon (1968). Geometría Analític, un enfoque Vectorial.